Einführung
in die
Allgemeine Mechanik

Zum Gebrauch bei Vorträgen,
sowie zum Selbstunterricht

Von

Dr. Max Planck

Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin

Mit 43 Figuren

Zweite Auflage



Verlag von S. Hirzel in Leipzig
1920.

Vorwort.

Wenn die Zahl der in älterer und neuerer Zeit erschienenen, zum Teil ausgezeichneten Lehrbücher der Mechanik um ein weiteres vermehrt wird, so bedarf dies einer erläuternden Bemerkung. — In meiner langjährigen Lehrtätigkeit ist mir immer wieder die Erfahrung entgegengetreten, daß die Schwierigkeiten, mit denen der Studierende beim ersten Betreten des Gebiets der theoretischen Physik zu kämpfen hat, häufig weniger die mathematische Form, als vielmehr den physikalischen Inhalt der ihm dargebotenen Gedankengänge betreffen. Nicht das Rechnen mit den Gleichungen, sondern das Aufstellen und namentlich auch das Interpretieren derselben ist es, was ihm am meisten zu schaffen macht. In dieser Richtung nun ihm hilfreich an die Hand zu gehen ist der Hauptzweck des vorliegenden Leitfadens. Er wendet sich speziell an solche Jünger der Wissenschaft, die durch die Kenntnis der Elemente der analytischen Geometrie, sowie der Infinitesimalrechnung, sich bereits im Besitze einer gewissen mathematischen Bildung befinden. Als besonderes Merkmal der eingeschlagenen Methode schwebte mir dabei die Aufgabe vor, dem Leser das Lehrgebäude der Mechanik nicht als etwas fertig gegebenes abgeschlossen vorliegendes, sondern als etwas Schritt für Schritt Gewordenes vorzuführen, ihn nicht in einer festen, von den Klassikern der Wissenschaft her überkommenen Richtung sozusagen vorwärts zu ziehen, sondern ihm nur an entscheidenden Wendepunkten als ratender und gelegentlich als warnender Wegweiser zu dienen, damit ihm auch etwas von dem besonderen Reiz übrig bleibt, den jeder unabhängig Denkende beim selbständigen Voranschreiten in einer ihm neuen Gegend empfindet.

Daß damit die Art der Behandlung des Stoffes im allgemeinen dieselben Wege einschlägt, welche die Entwicklung der Wissenschaft tatsächlich durchgemacht hat, wird jedem einleuchtend er-

scheinen, der wie ich sich zu der Ansicht neigt, daß die Geschichte einer exakten Wissenschaft von ihrem logischen Aufbau nicht allzuweit abweicht. Selbstverständlich nur im großen und ganzen; denn häufig genug haben äußere Umstände, besonders solche, die in der persönlichen Eigenart der bahnbrechenden Forscher wurzeln, auch auf Um- und selbst Irrwege geführt, welche alle nachträglich noch einmal mitzumachen für den hier beabsichtigten Zweck überflüssig und schädlich sein würde. Doch habe ich keineswegs zur Ableitung eines Satzes jedesmal das kürzeste und eleganteste Verfahren aufgesucht, sondern stets dasjenige, welches mir gedanklich als das naheliegendste und durchsichtigste erscheint. Denn weder wie der Satz tatsächlich gefunden worden ist, noch wie er am direktesten nachträglich bewiesen werden kann, suchte ich darzustellen, sondern wie er am einfachsten hätte gefunden werden können; wobei freilich zuzugeben ist, daß hier für die persönliche Auffassung ein gewisser Spielraum bleibt.

An eine Vollständigkeit der Behandlung des Stoffes nach irgendeiner Richtung hin habe ich bei dem elementaren Charakter des Werkes, worauf auch die Fassung des Titels hindeuten soll, nicht entfernt denken können; in dieser Hinsicht muß auf umfangreichere Lehrbücher der Mechanik und auf die einschlägige Spezialliteratur verwiesen werden. Auf der anderen Seite findet sich aber doch häufig eine passende Gelegenheit benutzt, um einen früher schon bewiesenen Satz auf einem neuen Wege noch einmal abzuleiten. Ist doch kein Mittel besser geeignet, sowohl die Eigenart eines Problems, als auch die Leistungsfähigkeit der einzelnen zu seiner Bewältigung dienenden Methoden ins rechte Licht zu setzen, als eine Behandlung der nämlichen Aufgabe auf verschiedene Weisen.

Eine am Schluß angefügte alphabetische Zusammenstellung aller gegebenen Definitionen und der wichtigsten Sätze wird, wie ich hoffe, die Brauchbarkeit des Büchleins erhöhen.

Berlin-Grunewald, August 1916.

Der Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die Veranstaltung der neuen Ausgabe konnte ich dazu benutzen, um neben einigen notwendigen Verbesserungen auch eine Reihe von kleineren und größeren Zusätzen einzufügen. Unter den letzteren erwähne ich besonders die Einführung der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung, welche neuerdings für die Entwicklung der Quantentheorie von hervorragender Bedeutung geworden ist. Den Fachgenossen, die mich zu derartigen Änderungen angeregt haben, sage ich auch an dieser Stelle für ihr freundliches Interesse aufrichtigen Dank.

Berlin-Grunewald, Dezember 1919.

Der Verfasser.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 1

Erster Teil. Mechanik eines materiellen Punktes 3

Erstes Kapitel. Bewegung auf einer Geraden 3

Zweites Kapitel. Bewegung im Raume 20

Drittes Kapitel. Zentralkräfte. Potential 35

Viertes Kapitel. Integration der Bewegungsgleichungen 59

Fünftes Kapitel. Relative Bewegung 70

Sechstes Kapitel. Vorgeschriebene Bedingungen 82

Zweiter Teil. Mechanik eines Systems materieller Punkte . 105

Erstes Kapitel. Statik eines starren Körpers 105

Zweites Kapitel. Statik eines beliebigen Punktsystems 131

Drittes Kapitel. Dynamik eines beliebigen Punktsystems 167

Viertes Kapitel. Dynamik eines starren Körpers 196

Einführung in die allgemeine Mechanik.

§ 1. Die Mechanik ist die Lehre von den Bewegungsgesetzen materieller Körper. Bewegung ist Änderung des Ortes mit der Zeit. Zum Begriff der Bewegung gehört aber außer den Begriffen von Ort und Zeit noch der Begriff dessen, was sich bewegt, und dies braucht im allgemeinen noch kein materieller Körper zu sein. Denn man spricht z. B. auch von der Bewegung eines Wellenbergs auf einer Wasserfläche, die natürlich wohl zu unterscheiden ist von der Bewegung der Wasserteilchen selber, oder von der Bewegung eines Schattens auf einer hellen Fläche, oder von der Bewegung einer Kraftlinie in einem Magnetfeld. Hier ist das, was sich bewegt, nicht Materie, sondern ein gewisser wohldefinierter ins Auge gefaßter „Zustand". Zur deutlicheren Charakterisierung pflegt man daher die Bewegungen materieller Körper auch als „korpuskulare" oder „konvektive" Bewegungen zu bezeichnen. Nur mit diesen korpuskularen Bewegungen hat es die Mechanik zu tun, wobei nicht ausgeschlossen ist, daß, wie in dem obigen Beispiel der Wasserwelle, eine korpuskulare Bewegung zugleich als Wellenbewegung aufgefaßt werden kann. Die Ansicht, daß alle physikalischen Veränderungen, also auch alle Arten von Bewegungen, sich auf Korpuskularbewegungen zurückführen lassen, bezeichnet man als die mechanische Naturanschauung. Die Frage nach ihrer Berechtigung lassen wir hier aber ganz offen.

§ 2. Der einfachste materielle Körper ist ein materieller Punkt, d. h. ein Körper, dessen räumliche Abmessungen verschwindend klein sind gegen alle Abmessungen, welche bei seiner Bewegung eine Rolle spielen. Ob ein bestimmter materieller Körper als ein Punkt angenommen werden kann, hängt also ab von der Art der betrachteten Bewegung. So kann man die Erde bei ihrer Bewegung um die Sonne als einen materiellen Punkt behandeln, nicht aber bei der Drehung um ihre Achse, wie denn überhaupt ein Körper, der sich um eine in seinem Innern liegende Achse

dreht, bezüglich dieser Drehung niemals als materieller Punkt betrachtet werden kann.

Wohl zu unterscheiden ist der materielle Punkt vom geometrischen Punkt. Letzterer ist vollkommen charakterisiert durch den Ort, an dem er sich befindet, ersterer aber außerdem noch durch die Beschaffenheit seiner Materie, und zwar sind die materiellen Punkte im allgemeinen nicht nur als quantitativ, sondern auch als qualitativ verschieden zu betrachten. Denn ein allgemeines Maß für die Menge der Materie läßt sich nicht von vornherein angeben. Quantitative Vergleiche kann man bei verschiedenartigen Stoffen, z. B. Eisen und Blei, zunächst immer nur in bezug auf eine spezielle Eigenschaft anstellen.

Ein materieller Körper läßt sich stets aus so kleinen Teilen zusammengesetzt denken, daß jeder derselben als materieller Punkt betrachtet werden kann, und dementsprechend läßt sich jede, wenn auch noch so komplizierte, Bewegung eines Körpers zurückführen auf die Bewegungen der materiellen Punkte, aus denen er besteht. Wir betrachten daher zuerst einen einzelnen materiellen Punkt, indem wir die ganze Mechanik einteilen in zwei Teile: die Mechanik eines materiellen Punktes und die Mechanik eines Systems von materiellen Punkten.

Erster Teil.

Mechanik eines materiellen Punktes.

Erstes Kapitel. Bewegung auf einer Geraden.

§ 3. Wir wollen die geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes zunächst nur an sich betrachten, so, wie sie direkt beobachtet wird, also ohne nach ihren Ursachen zu fragen. (Reine Bewegungslehre, auch „Kinematik" oder „Phoronomie" genannt.) Ein bewegter Punkt ändert seine Lage mit der Zeit, seine Bewegung ist bestimmt, wenn man die Lage für jede beliebige Zeit kennt, d. h., wenn die Lage in ihrer Abhängigkeit von der Zeit, als Funktion der Zeit, gegeben ist. Die Lage wird charakterisiert durch einen geometrischen Punkt P, und dieser durch seinen Abstand x von einem fest im Raume angenommenen Punkt O, dem Anfangspunkt der Koordinaten (Fig. 1). Die Größe x, die Abszisse des Punktes P, nehmen wir positiv oder negativ, je nachdem P rechts oder links von O liegt. Dann fällt für $x=0$ P mit O zusammen. Die Bahn des Punktes P ist die x-Achse oder die Abszissenachse. Die Richtung, in welcher x wächst, nennen wir die Richtung der Achse, sie ist in der Fig. 1 mit einem Pfeil bezeichnet. Um den Abstand x durch eine bestimmte Zahl ausdrücken zu können, müssen wir eine bestimmte Längeneinheit einführen und nehmen als solche für gewöhnlich 1 cm, das ist der hundertste Teil der Länge des in Paris aufbewahrten Normalmeters, welche sehr angenähert den zehnmilliontelsten Teil des Erdmeridianquadranten darstellt. Dann ist die Größe x die Anzahl der cm, welche die Strecke OP mißt.

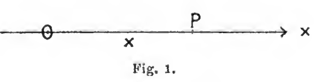


Fig. 1.

Ebenso wie eine bestimmte Lage durch einen geometrischen Punkt x, so wird eine bestimmte Zeit charakterisiert durch einen

Zeitpunkt, nämlich durch die Länge der Zeit t, welche von einem fest angenommenen Zeitpunkt, dem Anfangspunkt der Zeit, an verflossen ist, gemessen durch irgendeine hinreichend regelmäßig gehende Uhr. Die Zeitkoordinate t nehmen wir positiv oder negativ, je nachdem der Zeitpunkt später oder früher ist als der Anfangspunkt, für welchen $t=0$ ist. Als Richtung der Zeitachse bezeichnen wir die Richtung von früheren zu späteren Zeiten. Als Zeiteinheit werden wir in der Regel die sec benutzen; das ist der 86400te Teil des mittleren Sonnentages. Dann ist die Größe t die Anzahl der sec, welche seit dem Zeitpunkt $t=0$ verflossen sind.

Die Bewegung des materiellen Punktes ist bestimmt, wenn seine Lage als Funktion der Zeit gegeben ist, also wenn:

$$x=f(t), \tag{1}$$

wobei wir die Funktion f als reell, eindeutig und stetig voraussetzen. Denn der materielle Punkt nimmt zu jeder Zeit eine bestimmte Lage ein und springt auch nicht plötzlich an einen anderen Ort.

Löst man die Gleichung (1) nach t auf:

$$t=\varphi(x),$$

so erhält man die Antwort auf die Frage, wann sich der Punkt an einer bestimmten Stelle x befindet. Die Funktion φ braucht weder reell noch eindeutig zu sein; denn es kann vorkommen, daß der Punkt eine bestimmte Stelle x überhaupt niemals erreicht, oder auch, daß er sie öfters, zu verschiedenen Zeiten, erreicht, wie z. B., wenn die Bewegung periodisch ist.

§ 4. Als Beispiel betrachten wir zuerst den speziellen Fall, daß die Funktion $f(t)$ lineär ist, also:

$$x=at+b, \tag{2}$$

wobei a und b konstant.

Die physikalische Bedeutung der Konstanten b ist einfach: sie bezeichnet die Lage des Punktes für $t=0$. Die Bedeutung der Konstanten a ergibt sich aus folgender Betrachtung. Wir fragen nach der Länge des Weges, welchen der Punkt in irgendeinem Zeitintervall $t'-t=\Delta t$ zurücklegt. Dieselbe ergibt sich gleich $x'-x$, wenn

$$x'=at'+b,$$

also:

$$x'-x=\Delta x=a(t'-t)=a\cdot\Delta t.$$

Bei der angenommenen Bewegung (2) ist also eine jede zurück-

gelegte Strecke Δx proportional der dazu benötigten Zeit Δt, oder: in gleichen Zeiten werden gleiche Strecken zurückgelegt. Das konstante Verhältnis einer zurückgelegten Strecke zu der dazu benötigten Zeit ist eben die Größe a:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = a\,, \tag{3}$$

und heißt die **Geschwindigkeit** des bewegten Punktes. Es ist der in der Zeit 1 zurückgelegte Weg, positiv oder negativ, je nachdem x mit wachsendem t zu- oder abnimmt. Die hier betrachtete Bewegung (2), bei der die Geschwindigkeit konstant ist, heißt daher „gleichförmige" Bewegung.

Nehmen wir nun den allgemeinen Fall einer beliebigen Bewegung: $x = f(t)$, und fragen wiederum nach der Strecke, welche der bewegte Punkt in irgendeinem Zeitintervall $t' - t = \Delta t$ zurücklegt. Dieselbe ergibt sich analog gleich $x' - x$, wenn $x' = f(t')$, also:

$$x' - x = \Delta x = f(t') - f(t) = f(t + \Delta t) - f(t)\,.$$

Daraus wieder durch Division:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\,.$$

Dies Verhältnis einer zurückgelegten Strecke zu der dazu benötigten Zeit heißt die **mittlere Geschwindigkeit** des bewegten Punktes in dem Zeitraum von t bis $t + \Delta t$. Die mittlere Geschwindigkeit hängt also im allgemeinen sowohl von t als auch von Δt ab.

Nimmt man nun das Zeitintervall kleiner und kleiner, so erhält man schließlich den Grenzwert:

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = f'(t)\,, \tag{4}$$

und bezeichnet diesen Differentialquotienten als die **Geschwindigkeit** u des bewegten Punktes zur Zeit t. Dieselbe ist nur mehr von der Zeit t selber abhängig.

Für einen gleichförmig bewegten Punkt erhalten wir aus (2) als Geschwindigkeit wieder $u = \frac{dx}{dt} = a$, für einen ruhenden Punkt $x = \text{const}$, $u = 0$.

§ 5. Ehe man die Größe einer Geschwindigkeit durch eine bestimmte Zahl bezeichnen kann, müssen natürlich zuerst die Einheiten für Länge und Zeit festgesetzt sein. Je nach der Wahl dieser Einheiten ändert sich die physikalische Bedeutung einer be-

stimmten zur Darstellung einer Geschwindigkeit dienenden Zahl. Daher sagt man, daß die Geschwindigkeit keine „reine“ Zahl ist, sondern eine „Dimension“ hat, nämlich die Dimension einer Länge, dividiert durch eine Zeit:

$$\left[\frac{l}{t}\right].$$

Durch dies von Maxwell eingeführte Symbol für die Dimension wird zugleich ausgedrückt, wie der für eine bestimmte Geschwindigkeit einzusetzende Zahlenwert zu ändern ist, wenn die Einheit der Länge oder die der Zeit oder beide geändert werden. Will man z. B. die Geschwindigkeit

$$20\left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right]$$

auf Meter und Minuten als Einheiten beziehen, so hat man nur zu schreiben:

$$1\,[\text{cm}] = \frac{1}{100}\,[\text{met}], \quad 1\,[\text{sec}] = \frac{1}{60}\,[\text{min}],$$

und kann nun mit diesen Symbolen wie mit mathematischen Größen rechnen. Die Substitution ergibt dann das gesuchte Resultat:

$$20\left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right] = 12\left[\frac{\text{met}}{\text{min}}\right].$$

Ebenso kann man bei sämtlichen abgeleiteten Größen verfahren, sobald ihre Dimensionsformel bekannt ist.

§ 6. Nach der gleichförmigen Bewegung $u = \text{const}$ betrachten wir zunächst den speziellen Fall, daß die Geschwindigkeit des bewegten Punktes lineär von der Zeit abhängt, also etwa:

$$u = a_1 t + b_1, \tag{5}$$

wobei a_1 und b_1 konstant. Die Konstante b_1 bezeichnet die Geschwindigkeit des Punktes für $t = 0$. Die Bedeutung der Konstanten a_1 ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Wir fragen nach der Änderung, welche die Geschwindigkeit in irgendeinem Zeitintervall $t' - t = \Delta t$ erleidet. Dieselbe ergibt sich gleich $u' - u$, wenn:

$$u' = a_1 t' + b_1,$$

also:

$$u' - u = \Delta u = a_1 (t' - t) = a_1 \cdot \Delta t.$$

Bei der angenommenen Bewegung (5) ändert sich also die Geschwindigkeit stets proportional der Zeit, und das konstante Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung zu der dazu benötigten Zeit ist eben die Größe a_1:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = a_1, \tag{6}$$

und heißt die Beschleunigung des bewegten Punktes. Es ist der Geschwindigkeitszuwachs in der Zeit 1, positiv oder negativ, je nachdem die Geschwindigkeit u mit wachsender Zeit t zu- oder abnimmt. Die hier betrachtete Bewegung (5), bei der die Beschleunigung konstant ist, heißt daher „gleichförmig beschleunigte" Bewegung.

Nehmen wir nun den allgemeinen Fall einer beliebigen Bewegung, also nach (4):

$$u = \dot{f}(t),$$

und fragen wiederum nach der Geschwindigkeitsänderung Δu in irgendeinem Zeitintervall $t' - t = \Delta t$. Dieselbe ergibt sich analog gleich $u' - u$, wenn $u' = \dot{f}(t')$; also, wenn man noch durch $t' - t$ dividiert:

$$\frac{u' - u}{t' - t} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\dot{f}(t + \Delta t) - \dot{f}(t)}{\Delta t}.$$

Dies Verhältnis einer Geschwindigkeitsänderung zu der dazu benötigten Zeit heißt die mittlere Beschleunigung des bewegten Punktes in dem Zeitraum von t bis $t + \Delta t$. Die mittlere Beschleunigung hängt also im allgemeinen sowohl von t als auch von Δt ab.

Nimmt man nun das Zeitintervall kleiner und kleiner, so erhält man schließlich den Grenzwert:

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \dot{u} = \ddot{x} = \ddot{f}(t), \tag{7}$$

und bezeichnet diesen als die Beschleunigung des bewegten Punktes zur Zeit t. Dieselbe ist nur mehr von der Zeit t selber abhängig.

Für einen gleichförmig bewegten, wie auch für einen ruhenden Punkt ist die Beschleunigung $\dot{u} = 0$.

Die Dimension einer Beschleunigung ist, wie man aus (7) erkennt:

$$\left[\frac{l}{t^2}\right].$$

Daher ist z. B. (vgl. § 5) die Beschleunigung:

$$20\left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}\right] = 720\left[\frac{\text{met}}{\text{min}^2}\right].$$

Man kann natürlich auf dem beschriebenen Wege noch weiter-

gehen und „Beschleunigungen höherer Ordnung" definieren. Allein diese spielen in der Physik nur eine geringe Rolle.

Wenn eine von den Größen x, u, $\dot{u}$ als Funktion der Zeit t gegeben ist, so lassen sich die beiden anderen durch Differentiation bzw. durch Integration nach t finden. So ist z. B. bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung (5) die Koordinate x quadratisch von t abhängig.

§ 7. Bisher sprachen wir nur von der Bewegung an sich, ohne Rücksicht auf ihre Ursachen. Jetzt wollen wir auch die letzteren in Betracht ziehen und müssen zu diesem Zwecke auf neue Erfahrungen zurückgreifen. Dieselben lehren uns die verschiedenartigsten Bewegungen kennen, z. B. einen geschleuderten Ball, einen fallenden Stein, ein schwingendes Pendel. In jedem Falle bemerken wir nun, daß eine bestimmte Ursache für die Art der Bewegung angegeben werden kann: bei dem geschleuderten Balle sind es etwa unsere eigenen gespannten Armmuskeln, bei dem fallenden Stein ist es die Erde, bei dem schwingenden Pendel ist es außerdem die Aufhängevorrichtung. Damit soll nur ausgedrückt werden, daß, wenn die genannten Körper (Arm, Erde, Aufhängevorrichtung) nicht vorhanden wären, die betreffende Bewegung nicht in der beobachteten Weise vor sich ginge. Die Hauptaufgabe der Mechanik ist nun die, bei gegebener Ursache die Bewegung zu finden.

Die erste Frage, die wir beantworten wollen, ist diese: Wie bewegt sich ein materieller Punkt, ganz abgesehen von seiner Vorgeschichte, wenn alle etwa früher wirksamen Ursachen seiner Bewegung beseitigt sind, wenn er sich also dauernd vollkommen isoliert, in unendlicher Entfernung von allen anderen Körpern, im leeren Raume befindet? Selbstverständlich läßt sich dies Experiment nicht rein anstellen; ja, man darf zweifeln, ob die gestellte Frage überhaupt einen physikalischen Sinn hat. Denn es läßt sich niemals mit Sicherheit entscheiden, ob nicht noch in ungeheuren Entfernungen ungeheuer große Körper vorhanden sind, welche die Bewegung des Punktes merklich beeinflussen. Andererseits kann man aber doch bei irgendeiner speziellen Bewegung den Einfluß der bekanntermaßen als Bewegungsursachen in Betracht kommenden Körper herabmindern, und zwar in einem prinzipiell unbeschränkten Grade. So kann man den geschleuderten Ball frei lassen, den Pendelfaden durchschneiden, usw. Die Erde kann man allerdings nicht beseitigen, wohl aber kann man ihren Einfluß dadurch eliminieren,

daß man den materiellen Punkt sich auf einer festen, genau horizontalen Ebene, z. B. auf der Fläche eines gehörig großen Billards, bewegen läßt. Dann ergibt das Experiment, daß der materielle Punkt, z. B. eine Billardkugel, sich in gerader Linie mit allmählich abnehmender Geschwindigkeit bewegt. Die Geschwindigkeitsabnahme erfolgt aber um so langsamer, je freier von Rauhigkeiten die ebene Unterlage ist; auf einer recht glatten Eisfläche ist die Geschwindigkeitsabnahme schon ungemein viel geringer als auf einem Billardtuch. Daraus ist zu schließen, daß auf einer absolut ebenen Fläche, bei welcher besondere, durch die Rauhigkeit und die damit stets verbundene Abschleifung und Erwärmung bedingte Oberflächenerscheinungen ausgeschlossen sind, die Geschwindigkeitsabnahme Null, d. h. die Geschwindigkeit konstant sein würde. Daher beantworten wir die oben gestellte Frage dahin, daß ein allen Bewegungsursachen entzogener materieller Punkt sich gleichförmig und geradlinig, nach Gleichung (2), bewegt. (Prinzip der Trägheit oder des Beharrungsvermögens, Newtons erstes Axiom.)

Die vorstehende Ableitung soll keineswegs einen Beweis des Trägheitsprinzips vorstellen, sondern sie soll nur einen Weg schildern, auf dem man zur Aufstellung dieses Prinzips gelangen kann. Der Beweis des Prinzips kann einzig und allein in den Bestätigungen gesucht werden, die seine zahllosen Anwendungen gefunden haben. Seine Bedeutung liegt eben darin, daß es die Summe aller auf diesem Gebiete gesammelten Erfahrungen in einem einzigen Satz zum Ausdruck bringt.

Auf der anderen Seite darf man das Prinzip der Trägheit weder als selbstverständlich noch als bloße Definition betrachten; denn es enthält eine bestimmte physikalische Behauptung, deren Richtigkeit durch Experimente bis zu einem sehr hohen Grade von Genauigkeit geprüft werden kann.

§ 8. Nehmen wir jetzt den Fall, daß ein ursprünglich vollkommen isolierter, also gleichförmig und geradlinig bewegter materieller Punkt, etwa eine Kugel auf absolut glatter horizontaler Ebene, durch eine Bewegungsursache in der Richtung seiner Bewegung beschleunigt oder verzögert wird. Wenn wir die Geschwindigkeitsänderung durch unsere Muskeln hervorbringen, indem wir z. B., im Falle der positiven Beschleunigung, die Kugel von hinten her schieben, oder, im Falle der negativen Beschleunigung, die Kugel von vorn her hemmen, so spüren wir ein Gefühl

der Anstrengung, das sich als unmittelbare Sinnesempfindung nicht näher definieren läßt, dessen Stärke aber sicherlich mit der Größe der hervorgebrachten Beschleunigung in einem kausalen Zusammenhang steht.

Wir wollen daher als Maß für die Ursache der Beschleunigung die Empfindung unseres Muskelsinnes benutzen und dementsprechend die Ursache der Beschleunigung als die „Kraft" X bezeichnen, welche wir auf die Kugel ausüben. Der Versuch lehrt uns dann, daß einer stärkeren Muskelempfindung, also einer größeren Kraft X, eine größere Beschleunigung $\dot{u}$ entspricht, und daß sich die Richtung der Beschleunigung mit der Richtung der Kraft umkehrt. Für $X = 0$ ist $\dot{u} = 0$, nach dem Trägheitsprinzip.

Weiter können wir in der Feststellung des Zusammenhanges zwischen Kraft und Beschleunigung auf experimentellem Wege nicht kommen, weil unsere Muskelempfindungen viel zu unbestimmt und schwankend sind, um ein exaktes Maß für die Größe der ausgeübten Kraft zu liefern. Daher ergänzen wir jetzt die Lücke durch eine schärfere Definition. Wir setzen nämlich die Kraft X nach Größe und Vorzeichen proportional der durch sie bewirkten Beschleunigung $\dot{u}$. (Zweites „Axiom" von Newton.) Wir dürfen dies tun, weil die neue Festsetzung, soweit eine experimentelle Prüfung überhaupt möglich ist, übereinstimmt mit dem schon vorher festgelegten, aus der Muskelempfindung abgeleiteten Zusammenhang zwischen X und $\dot{u}$. Außerdem gewährt sie den Vorteil, den wir sogleich benutzen wollen, daß wir sie unmittelbar auch übertragen können auf den allgemeinen Fall, daß die Beschleunigung gar nicht durch unsere Muskeln, sondern durch irgendeinen anderen Körper hervorgerufen wird, so daß von einer Sinnesempfindung dabei gar keine Rede ist. Wir bezeichnen also nun ganz allgemein bei jeder beliebigen Bewegung die Ursache der Bewegung als Kraft und setzen ihre Größe proportional der durch sie bewirkten Beschleunigung. Dieselbe entspricht derjenigen Anstrengung, die wir verspüren würden, wenn wir die nämliche Bewegung, anstatt durch den sie verursachenden Körper, durch unsere Muskeln hervorrufen würden.

Es liegt hier die Frage nahe, ob es nicht einfacher und daher rationeller wäre, die Kraft von vornherein durch die Beschleunigung zu definieren, und nicht erst den Umweg über die Muskelempfindung zu machen. Dagegen ist aber zu bemerken, daß der Begriff der Kraft doch etwas ganz anderes ist als der der Be-

schleunigung, und daß man dem Inhalt dieses Begriffs viel näher kommt, wenn man ihn mit dem Muskelsinn, als wenn man ihn mit der Beschleunigung in Zusammenhang bringt. Dies wird sich sowohl im nächsten Paragraphen als auch wiederholt bei späteren Gelegenheiten, z. B. bei der relativen Bewegung (§ 57), deutlich zeigen.

Übrigens ist diese Art, einen fundamentalen physikalischen Begriff zu definieren, daß man ihn erst auf eine Sinnesempfindung zurückführt, und hierauf die erste, primitive Definition durch eine zweite, schärfere ergänzt und verfeinert, die in der Physik allgemein übliche und wohl auch einzig mögliche. So definiert man z. B. den Wärmegrad eines Körpers zunächst durch den Wärmesinn, die Farbe eines Lichtstrahls zunächst durch den Farbensinn. Für exakten Gebrauch müssen aber diese Definitionen verfeinert werden, und dies geschieht jedesmal durch Zurückführung auf eine genaueren Messungen zugängliche Erscheinung: bei der Wärme auf die Volumenänderung (Thermometer), bei der Farbe auf die Wellenlänge (Interferenzstreifen). Wollte man, wie die Kraft direkt durch die Beschleunigung, so die Wärme direkt durch die Volumenänderung, oder die Farbe direkt durch die Wellenlänge definieren, so würden diese Begriffe gerade diejenige Bedeutung verlieren, welche sie der genaueren Erforschung wert gemacht hat, und welche, was noch wichtiger ist, der Weiterbildung der physikalischen Theorien den Weg ebnet.

In der Tat ist auch die auf der Beschleunigung beruhende Kraftdefinition noch nicht die endgültige, sondern einer weiteren Verbesserung und Verallgemeinerung fähig, wie sich weiter unten (§ 124) ergeben wird.

§ 9. Das einfachste wäre es offenbar, die Kraft X nicht nur proportional, sondern direkt gleich der Beschleunigung $\dot{u}$ zu setzen. Aber dadurch würden wir in einen Widerspruch mit der primären, auf dem Muskelsinn beruhenden Definition der Kraft geraten, denn dann müßte eine bestimmte Kraft unter allen Umständen eine bestimmte Beschleunigung hervorbringen. Nehmen wir nun zwei Kugeln, eine aus Holz, die andere aus Eisen, etwa von gleicher Größe, die sich beide mit der nämlichen konstanten Geschwindigkeit auf einer glatten horizontalen Ebene bewegen. Dann lehrt der Versuch, daß es einer größeren Anstrengung bedarf, um die eiserne, als um die hölzerne Kugel in bestimmter Weise zu beschleunigen oder zu verzögern. Wir sagen daher, daß die eiserne Kugel „träger" ist als die hölzerne und müssen in die Beziehung

zwischen Kraft und Beschleunigung noch eine (positive) Proportionalitätskonstante m aufnehmen:

(8) $$X = m\dot{u} = m\frac{du}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

welche durch die Beschaffenheit des bewegten materiellen Punktes (§ 2) bestimmt ist. Da für die trägere Kugel zur Erzielung einer bestimmten Beschleunigung eine größere Kraft erforderlich ist, so ist für sie m größer; wir nennen daher allgemein m die träge Masse des materiellen Punktes. Diese ist natürlich für alle verschiedenartigen Bewegungen des Punktes und für alle verschiedenartigen Kräfte, die auf ihn wirken, die nämliche.

Als Einheit der Masse m nehmen wir die Masse eines ganz bestimmten Körperindividuums, nämlich den tausendsten Teil der Masse des in Paris aufbewahrten Normalstücks aus Platin, und nennen dieselbe 1 g (Gramm). Sie ist sehr angenähert gleich der Masse von 1 ccm Wasser bei 4° C.

Durch die Einheit der Masse ist natürlich nach (8) auch die Einheit der Kraft bestimmt, und zwar besitzt eine Kraft die Dimension:

(8a) $$\left[\frac{ml}{t^2}\right].$$

Die Einheit der Kraft im cm-g-sec-System wird ein Dyn oder eine Dyne genannt.

§ 10. Als erste Anwendung der Grundgleichung (8) behandeln wir die Bewegung eines vertikal nach oben geworfenen materiellen Punktes im luftleeren Raume. Nachdem der Punkt abgeschleudert und nun sich selber überlassen ist, wirkt auf ihn nur die Anziehungskraft der Erde, die wir das „Gewicht" G des Punktes nennen und als konstant betrachten, und zwar in vertikaler Richtung nach unten. Legen wir also die positive x-Achse in die Richtung nach oben, so ist:

(9) $$X = -G,$$

und dies in (8) eingesetzt, ergibt:

$$m\frac{du}{dt} = -G$$

Integriert:

$$mu = -Gt + C.$$

Die Integrationskonstante C kann berechnet werden, wenn für eine bestimmte Zeit t, z. B. für den Anfangswert $t = 0$, die Geschwindigkeit u bekannt ist. Nennen wir die (positive) Anfangs-

geschwindigkeit u_0, so folgt aus der letzten Gleichung für $t=0$ und $u=u_0$:

$$mu_0 = C,$$

also durch Substitution:

$$mu = -Gt + mu_0,$$

oder:

$$u = -\frac{G}{m}t + u_0 = \frac{dx}{dt}. \qquad (10)$$

Die Geschwindigkeit u nimmt also gleichmäßig ab mit wachsender Zeit t. Für $t=\frac{mu_0}{G}$ wird sie gleich Null, und dann negativ, d. h. der materielle Punkt fällt wieder herab. Durch nochmalige Integration erhalten wir aus (10):

$$x = -\frac{1}{2}\frac{G}{m}t^2 + u_0 t + C',$$

und, wenn für $t=0$ $x=x_0$ ist:

$$x = x_0 + u_0 t - \frac{1}{2}\frac{G}{m}t^2. \qquad (11)$$

Hiermit ist die Bewegung vollständig gegeben.

Die größte erreichte Höhe x_m (x-Maximum) ergibt sich, wenn man in (11) den Zeitpunkt der Geschwindigkeitsumkehr einsetzt:

$$x_m = \frac{1}{2}\frac{m}{G}u_0^2 + x_0. \qquad (12)$$

Durch Elimination von t aus (10) und (11) erhält man die Antwort auf die Frage, welche Geschwindigkeit u der Punkt an einem bestimmten Orte x besitzt:

$$u^2 - u_0^2 = \frac{2G}{m}(x_0 - x). \qquad (13)$$

Für $x > x_m$ wird u imaginär, wie natürlich, für $x = x_m$ wird $u=0$, und für $x < x_m$ besitzt u zwei gleiche und entgegengesetzte Werte, deren positiver dem Aufstieg, deren negativer dem Abstieg entspricht. Die Abwärtsbewegung erfolgt also vollkommen symmetrisch zur Aufwärtsbewegung.

Wenn x_0 und u_0 nicht bekannt sind, so bleiben in den Bewegungsgleichungen die beiden Integrationkonstanten C und C' unbestimmt. Daher faßt man jene beiden Größen, welche die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes darstellen, unter der Bezeichnung „Anfangszustand" zusammen und kann dann den Satz aussprechen, daß durch die wirkende Kraft und durch den Anfangszustand die Bewegung in allen Einzelheiten bestimmt ist. Allgemein versteht man unter dem „Zustand" eines

materiellen Punktes den Inbegriff seiner Lage und seiner Geschwindigkeit.

Die vorstehenden Fallgesetze sind zuerst durch Galilei experimentell festgestellt worden. Derselbe fand überdies, daß der Quotient $\frac{G}{m}$ für alle materiellen Punkte der nämliche ist, daß also wenn:

$$\frac{G}{m} = g \tag{14}$$

gesetzt wird, die Größe g, die Beschleunigung der Schwere, nicht von m abhängt. Dagegen ist g an verschiedenen Orten etwas verschieden, und zwar nimmt g vom Äquator der Erde nach den Polen hin zu, nämlich von $978 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}\right]$ bis $983{,}2 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}\right]$.

Daher ist auch das Gewicht $G = mg$ eines bestimmten materiellen Punktes an verschiedenen Orten der Erde verschieden. Das Gewicht von 1 g beträgt am Äquator 978 Dyn, an einem Pol 983,2 Dyn.

§ 11. Der Umstand, daß die Schwerebeschleunigung g eines materiellen Punktes unabhängig ist von seiner Masse, liefert eine sehr genaue Methode zur Messung von Massen.

Man denke sich an den beiden Enden einer über eine feste Rolle laufenden Schnur zwei genau gleiche Gefäße befestigt, und in das eine Gefäß einen materiellen Punkt mit der Masse m gelegt, in das andere Gefäß aber eine gewisse Menge Wasser von der Masse m' gegossen.

Dann wird die Rolle sich nach derjenigen Seite zu drehen beginnen, auf welcher die Schnur stärker angezogen wird, auf welcher also, nach der Definition § 8, die größere Kraft wirkt; sie wird daher dauernd in Ruhe bleiben, wenn die Kräfte gleich sind, d. h. wenn das Gewicht G des materiellen Punktes gleich ist dem Gewicht G' des eingegossenen Wassers, oder nach (14), wenn:

$$m = m'.$$

Nun ist m' nach § 9 gleich dem Volumen des Wassers in ccm; also erhalten wir den Satz: Die Masse eines materiellen Punktes ist gleich dem Wasservolumen, welches ihm das Gleichgewicht hält. Auf die Größe der Schwerebeschleunigung g kommt es mithin dabei gar nicht an: ein materieller Punkt wiegt überall gleichviel Gramm, da das Gewicht G des Punktes sich von Ort zu Ort gerade in demselben Verhältnis ändert, wie das Gewicht G' des ent-

sprechenden Volumens Wasser. Um die Veränderlichkeit von G nachzuweisen, könnte man z. B. zu dem beschriebenen Versuch eine elastisch dehnbare Schnur benutzen. Dann würden die beiden Hälften der Schnur am Nordpol der Erde durch die nämlichen Körper stärker gespannt, also auch stärker verlängert werden als am Äquator.

§ 12. Von besonderem Interesse für die Physik sind diejenigen Kräfte, welche sich als Anziehung oder Abstoßung äußern, und deren Größe nur von der Entfernung der Punkte abhängt, zwischen denen sie wirken, — die sogenannten „Zentralkräfte".

Behandeln wir daher hier beispielsweise den Fall der geradlinigen Bewegung eines materiellen Punktes, der von einem festen Zentrum angezogen wird mit einer Kraft, die proportional ist seiner Entfernung von dem Zentrum. Machen wir das Zentrum zum Koordinatenanfangspunkt, so ist die Entfernung des beweglichen Punktes P von dem Zentrum gleich x, und die Anziehungskraft nach Größe und Richtung:

$$X = -cx \quad (c > 0).$$

Daraus die Bewegungsgleichung (8):

$$m\frac{du}{dt} = -cx. \tag{15}$$

Im Anfangszustand, für $t = 0$, sei:

$$x = 0 \quad \text{und} \quad u = u_0 \; (> 0). \tag{16}$$

Um die Bewegungsgleichung zu integrieren, multiplizieren wir auf beiden Seiten mit $\frac{dx}{dt} = u$ und erhalten:

$$m \cdot u \cdot \frac{du}{dt} = -cx\frac{dx}{dt},$$

oder nach t integriert:

$$\frac{1}{2}mu^2 = -\frac{c}{2}x^2 + C,$$

und, da für $x = 0$ $u = u_0$:

$$mu^2 = mu_0^2 - cx^2 = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{17}$$

Man ersieht hieraus unter anderem, daß die Geschwindigkeit u niemals größer wird als u_0, und daß die Entfernung x niemals größer wird als $u_0\sqrt{\frac{m}{c}}$.

Zur Ausführung der zweiten Integration schreiben wir die letzte Gleichung in der Form:

$$dt = \frac{dx \cdot \sqrt{m}}{\sqrt{m u_0^2 - c x^2}},$$

und erhalten integriert:

$$t = \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{u_0}\sqrt{\frac{c}{m}}\right) + C'.$$

Aus der Anfangsbedingung (16) folgt $C' = 0$, und daher:

$$x = u_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t\right). \tag{18}$$

Die Bewegung ist also eine periodische Schwingung um das feste Zentrum als Mittelpunkt.

Der konstante Faktor vor dem sin heißt die „Amplitude", der mit der Zeit veränderliche Winkel hinter dem sin die „Phase", der konstante Faktor bei t die „Frequenz" der Schwingung (Anzahl der Schwingungen in der Zeit 2π). Die Dauer einer Schwingungsperiode ist $2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$, hängt also nicht, ebensowenig wie die Frequenz, von der Anfangsgeschwindigkeit u_0 ab, und auch nicht von der Anfangslage, da der Fall einer beliebigen Anfangslage x_0 unmittelbar auf den hier behandelten zurückgeführt werden kann, dadurch, daß man den Anfangspunkt der Zeit t in einen solchen Augenblick verlegt, wo $x = 0$ wird.

§ 13. Das hier gefundene spezielle Bewegungsgesetz spielt in der Physik eine wichtige Rolle, es gilt nämlich ganz allgemein für kleine geradlinige Schwingungen eines Punktes um eine stabile Gleichgewichtslage, wie leicht zu beweisen ist.

Wenn ein ursprünglich ruhender Punkt durch irgendeine Störung, also etwa durch einen Stoß, der ihm die Anfangsgeschwindigkeit u_0 erteilt, aus seiner Gleichgewichtslage gebracht wird, so wirkt, falls dieselbe stabil ist, in jedem Augenblicke eine Kraft auf ihn ein, welche ihn in die Gleichgewichtslage zurückzieht, und welche irgendwie von seiner Lage abhängen mag, also:

$$X = f(x).$$

Dabei bezeichne $x = 0$ die Gleichgewichtslage.

Sind nun die Schwingungen hinreichend klein, so kann man $f(x)$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$X = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

in welcher die erste Konstante $c_0 = 0$, da für $x = 0$ $X = 0$, und die zweite Konstante c_1 negativ ist, da das Gleichgewicht stabil sein soll. Dies ergibt mit Fortlassung der Reihenglieder von

kleinerer Größenordnung genau die im vorigen Paragraphen behandelte Bewegung und damit auch den allgemeinen Satz, daß die Periode einer kleinen geradlinigen Schwingung um eine stabile Gleichgewichtslage unabhängig ist von der Art der Störung. Daß der nämliche Satz auch für nichtgeradlinige Schwingungen gilt, werden wir später, im § 70, sehen.

§ 14. Wenn auf einen materiellen Punkt gleichzeitig mehrere Kräfte, in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung, wirken, die nach Größe und Richtung durch die Ausdrücke X_1, X_2, $X_3, \cdots$ dargestellt sein mögen, so sind diese Kräfte äquivalent einer einzigen Kraft X, die nach Größe und Richtung dargestellt wird durch die algebraische Summe:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots. \tag{19}$$

Man sagt dann, daß die Einzelkräfte sich zu der „resultierenden" Kraft X zusammensetzen. Ist $X = 0$, so halten sich die einzelnen Kräfte im Gleichgewicht, und der materielle Punkt verhält sich in jeder Beziehung ebenso, als ob überhaupt keine Kraft auf ihn wirkte.

§ 15. Wir betrachten als Beispiel den Fall der geradlinigen Bewegung eines materiellen Punktes, welcher, wie im § 12, von dem Koordinatenanfangspunkt mit der Kraft cx angezogen wird, dabei aber gleichzeitig durch Reibung oder eine andere dämpfende Ursache in seiner Bewegung gehemmt wird, vermittelst einer Kraft, deren Größe seiner augenblicklichen Geschwindigkeit u proportional ist. Dann ist nach (19) die resultierende Kraft:

$$X = X_1 + X_2,$$

wobei $X_1 = -cx$ und $X_2 = -\varrho \frac{dx}{dt}$,

(ϱ ein konstanter Reibungskoeffizient)

und die Bewegungsgleichung (8) lautet:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \varrho\frac{dx}{dt}, \tag{19a}$$

oder, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{c}{m} = a \quad \text{und} \quad \frac{\varrho}{2m} = w,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2w\frac{dx}{dt} + ax = 0. \tag{20}$$

Der Anfangszustand sei wieder, wie in § 12, gegeben durch:

$$x = 0, \quad u = u_0 \ (> 0).$$

Ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (20) ist:

$$x = A e^{\alpha t},$$

wobei die Konstante A beliebig ist, die Konstante α aber der Gleichung genügen muß:

$$\alpha^2 + 2 w \alpha + a = 0.$$

Nennen wir also die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung α und β, so daß:

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = -w \pm \sqrt{w^2 - a}, \tag{21}$$

so ist auch der Ausdruck:

$$x = A e^{\alpha t} + B e^{\beta t}, \tag{22}$$

ein Integral der Gleichung (20), und zwar das allgemeine Integral. weil es zwei beliebige Konstanten A und B enthält.

Aus (22) ergibt sich durch Differentiation:

$$\frac{dx}{dt} = u = A \alpha e^{\alpha t} + B \beta e^{\beta t}. \tag{23}$$

Die Werte der Integrationskonstanten A und B sind durch den Anfangszustand bestimmt. Denn für $t = 0$ folgt aus (22) und (23):

$$0 = A + B \quad \text{und} \quad u_0 = A \alpha + B \beta.$$

Folglich, mit Berechnung von A und B, und Substitution in (22) und (23):

$$x = \frac{u_0}{\alpha - \beta}(e^{\alpha t} - e^{\beta t}), \tag{24}$$

$$u = \frac{u_0}{\alpha - \beta}(\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}). \tag{25}$$

Hierdurch ist, in Verbindung mit (21), die Bewegung vollständig bestimmt. Zur Untersuchung ihrer näheren Eigentümlichkeiten wollen wir nacheinander die Fälle betrachten, daß die Quadratwurzel in (21) reell, Null oder imaginär ist.

1. Es sei $w^2 > a$. Dann sind α und β beide negativ, und zwar ist $-\beta > -\alpha$. Daher ergibt sich x für alle Zeiten t positiv, bis für $t = \infty$ $x = 0$ wird. Die Bewegung ist aperiodisch, der bewegliche Punkt erreicht seine größte Elongation, d. h. den maximalen Wert von x, für $u = 0$ und:

$$t = \frac{\log \frac{\beta}{\alpha}}{\alpha - \beta},$$

und kehrt dann direkt in seine Gleichgewichtslage zurück.

2. Es sei $w^2 = a$. Dann ist nach (21):

$$\alpha = \beta = -w.$$

Da für diesen Fall der Ausdruck für x in (24) die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so findet man den wahren Wert, indem man $w^2 - a = \varepsilon^2$ setzt, also:

$$\alpha = -w + \varepsilon, \quad \beta = -w - \varepsilon,$$

dies in (24) substituiert und zur Grenze $\varepsilon = 0$ übergeht. Dann ergibt sich:

$$x = u_0 t e^{-wt}, \quad u = u_0 e^{-wt}(1 - wt). \tag{26}$$

Die Bewegung ist wieder aperiodisch, die Elongation x stets positiv, ihr maximaler Wert $\frac{u_0}{ew}$, der zur Zeit $t = \frac{1}{w}$ erreicht wird.

3. Es sei $w^2 < a$. Dann sind nach (21) α und β konjugiert komplex, nämlich:

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = -w \pm i\sqrt{a - w^2}, \qquad i = \sqrt{-1},$$

und die Substitution in (24) ergibt:

$$x = \frac{u_0}{\sqrt{a - w^2}} \cdot e^{-wt} \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{a - w^2}\right). \tag{27}$$

Der materielle Punkt führt gedämpfte Schwingungen aus und kommt für $t = \infty$ zur Ruhe. Für $t = \frac{n \cdot \pi}{\sqrt{a - w^2}}$ (n eine beliebige ganze Zahl), geht der Punkt durch die Gleichgewichtslage, und zwar, wenn n gerade, in positiver, wenn n ungerade, in negativer Richtung. Die Dauer einer Periode ist die Zeit, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichgerichteten Durchgängen durch die Gleichgewichtslage verstreicht, also $\frac{2\pi}{\sqrt{a - w^2}}$; sie wächst mit wachsendem Widerstand w, ist aber, wie bei ungedämpften Schwingungen, unabhängig vom Anfangszustand.

Die Geschwindigkeit u ergibt sich als:

$$u = u_0 e^{-wt} \cdot \left\{ \cos\left(t \cdot \sqrt{a - w^2}\right) - \frac{w}{\sqrt{a - w^2}} \sin\left(t \cdot \sqrt{a - u^2}\right) \right\}. \tag{28}$$

Für einen Durchgang durch die Gleichgewichtslage in positiver Richtung ist daher:

$$u = u_0 e^{-\frac{2n\pi w}{\sqrt{a - w^2}}}. \tag{29}$$

Diese Geschwindigkeiten nehmen also für die aufeinanderfolgenden Durchgänge ($n = 0, 1, 2, 3, \cdots$) in geometrischer Progression ab, oder die natürlichen Logarithmen dieser Geschwindig-

keiten nehmen in arithmetischer Progression ab, nämlich jedesmal um den Betrag $\frac{2\pi w}{\sqrt{a-w^2}}$. Diese Zahl heißt daher das „logarithmische Dekrement“ der Schwingungen, und da sie konstant ist, so heißen diese Schwingungen „gleichmäßig“ gedämpft.

Die Amplituden der Schwingungen, d. h. die maximalen Elongationen, ergeben sich nicht etwa aus (27), wenn man darin den sin gleich 1 setzt, sondern aus (28), wenn man darin $u=0$ setzt. Sie besitzen das nämliche logarithmische Dekrement, wie die Geschwindigkeiten (29) beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage.

Für $w=0$ werden die Schwingungen ungedämpft periodisch und die Gleichungen der Bewegung identisch mit den in § 12 abgeleiteten.

Zweites Kapitel. Bewegung im Raume.

§ 16. Wie in § 3 die geradlinige Bewegung, so behandeln wir auch die räumliche Bewegung eines materiellen Punktes zunächst ohne Rücksicht auf ihre Ursachen, rein phoronomisch. Die räumliche Bewegung eines Punktes ist bestimmt, wenn seine Lage als Funktion der Zeit t gegeben ist. Zur Charakterisierung der Lage eines Punktes im dreidimensionalen Raume sind drei Koordinatenachsen erforderlich, die wir rechtwinklig zueinander annehmen, und deren positive Richtungen wir mit x, y, z bezeichnen.

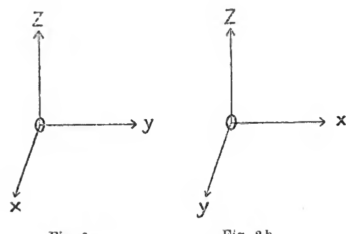


Fig. 2a. Fig. 2b.

Durch diese Festsetzung ist die Natur des Koordinatensystems aber noch nicht bestimmt, vielmehr bleibt noch eine Zweideutigkeit übrig, die durch die beiden Figuren 2a und 2b illustriert ist. Die in diesen Figuren dargestellten beiden Koordinatensysteme lassen sich offenbar in keinerlei Weise durch Verschieben und Drehen vollständig zur Deckung bringen, sie verhalten sich wie die rechte Hand zur linken. Wohl aber läßt sich jedes beliebige andere rechtwinklige Koordinatensystem entweder mit dem System a oder mit dem System b durch Verschieben und Drehen vollständig zur Deckung bringen.

Daher zerfallen alle Koordinatensysteme in zwei Gruppen *a* und *b*, die man in folgender Weise charakterisieren kann: Wenn man den auswärts gerichteten Daumen als x-Richtung, den ausgestreckten Zeigefinger als y-Richtung, den zu beiden rechtwinklig ausgestreckten Mittelfinger als z-Richtung betrachtet, so stellt die rechte Hand ein System der Gruppe *a*, die linke Hand ein System der Gruppe *b* vor. Daher heißen auch die *a*-Systeme rechtshändige, die *b*-Systeme linkshändige Systeme. Wir werden hier, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, stets rechtshändige Systeme, wie in Fig. 2a, benutzen.

§ 17. Statt durch die Koordinaten x, y, z wird die Lage eines Punktes P im Raume oft auch charakterisiert durch die Angabe seiner Entfernung r vom Anfangspunkt O zugleich mit den Winkeln ξ, η, ζ, welche die Richtung von O nach P mit den positiven Koordinatenachsen bildet. Dann ist $OP = r$ die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Kantenlängen x, y, z (Fig. 3), und man hat:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad (30)$$

$$\cos\xi = \frac{x}{r}, \quad \cos\eta = \frac{y}{r}, \quad \cos\zeta = \frac{z}{r}. \qquad (31)$$

Fig. 3.

Die Größe r nehmen wir stets positiv, und die Richtungswinkel ξ, η, ζ stets zwischen 0 und π. Zu einer negativen Koordinate gehört also immer ein stumpfer Richtungswinkel. Dann werden durch x, y, z die Werte von r, ξ, η, ζ eindeutig bestimmt, und ebenso umgekehrt. Doch sind die Winkel ξ, η, ζ nicht unabhängig voneinander wählbar, sondern sie müssen nach den beiden letzten Gleichungen die Identität erfüllen:

$$\cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta = 1\,. \qquad (32)$$

Dann ist nach (31):

$$\cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = x : y : z\,. \qquad (33)$$

Man bezeichnet diese drei cos, deren Quadratsumme = 1 ist, kurz auch als „Richtungscos“ und ihre Verhältnisse als „Richtungsverhältnisse“.

Die in der Richtung (ξ, η, ζ) aufgetragene Strecke OP, durch welche die Lage des Punktes P im Raume eindeutig bestimmt ist, nennt man eine „gerichtete Größe“ oder einen „Vektor“, und be-

zeichnet sie, wie alle Vektoren, mit einem deutschen Buchstaben, hier $\mathfrak{r}$. Dann ist der Zahlenwert von r der „absolute Betrag“ oder die „Größe“ des Vektors $\mathfrak{r}$:

(34) $$r = |\mathfrak{r}|.$$

r und $\mathfrak{r}$ sind wohl zu unterscheiden. Haben wir z. B. zwei Punkte P und P', so bedeutet die Gleichung $r = r'$, daß P und P' gleich weit von O entfernt sind, dagegen die Gleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'$, daß P und P' zusammenfallen, die Gleichung $\mathfrak{r} = -\mathfrak{r}'$, daß P und P' einander in gleicher Entfernung von O gerade gegenüberliegen.

Die durch (31) bestimmten Größen x, y, z heißen die „Komponenten“ des Vektors $\mathfrak{r}$ in Richtung der Koordinatenachsen. Es sind die Projektionen der Strecke OP auf die Koordinatenachsen.

Allgemein definiert man als Komponente x' eines Vektors $\mathfrak{r}$ in irgendeiner beliebig angenommenen Richtung die Projektion der Strecke $|\mathfrak{r}| = r$ auf diese Richtung, d. h.:

(35) $$x' = r \cos \delta ,$$

wenn δ der (spitze oder stumpfe) Winkel ist, den die Richtung von x' mit der Richtung von $\mathfrak{r}$ bildet.

Sind die Richtungswinkel ξ', η', ζ' von x' gegeben, so berechnet sich die Komponente x' (und der in der Fig. 3 nicht gezeichnete Winkel δ) auch wie folgt: Statt die Strecke $r = OP$ direkt auf die x'-Richtung zu projizieren, projiziere man zuerst die Strecke $OA = x$ (Fig. 3), dann die Strecke $AB = y$ und endlich die Strecke $BP = z$ auf die x'-Richtung, d. h. man lasse einen Punkt sich von O geradlinig über A und B nach P bewegen und fälle in jedem Augenblicke das Lot auf die x'-Richtung. Dann durchläuft die Projektion des bewegten Punktes, d. h. der Fußpunkt des Lotes, im ganzen die geradlinige Strecke von O bis P', der Projektion von P. Die algebraische Summe der drei auf x' projizierten Strecken ist also gleich der Entfernung des Anfangspunktes O von P', mithin:

(36) $$x \cdot \cos \xi' + y \cdot \cos \eta' + z \cdot \cos \zeta' = x' .$$

Daraus auch nach (31) und (35):

(37) $$\cos \delta = \cos \xi \cos \xi' + \cos \eta \cos \eta' + \cos \zeta \cos \zeta' .$$

Nach der Gleichung (35) ist die Komponente eines Vektors $\mathfrak{r}$ in seiner eigenen Richtung ($\delta = 0$) gleich r, die in der entgegengesetzten Richtung ($\delta = \pi$) gleich $-r$, die in irgendeiner rechtwinkligen Richtung $\left(\delta = \frac{\pi}{2}\right)$ gleich Null.

Die Gleichung (36) lehrt, daß man die Komponente x' eines Vektors $\mathfrak{r}$ in irgendeiner Richtung (ξ', η', ζ') auch dadurch erhalten kann, daß man, statt von dem absoluten Betrag des Vektors r, von seinen drei Komponenten x, y, z ausgeht, von jeder einzelnen dieser Komponenten die Komponente in der Richtung (ξ', η', ζ') bildet und die so erhaltenen Beträge algebraisch addiert. Auch in dieser Beziehung sind also die drei rechtwinkligen Komponenten x, y, z vollkommen äquivalent dem Vektor $\mathfrak{r}$ selber.

§ 18. Die räumliche Bewegung des Punktes P ist bestimmt, wenn seine drei Koordinaten x, y, z als Funktionen der Zeit t gegeben sind:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \tag{38}$$

wobei wir die Funktionen f, φ, ψ als reell, eindeutig und stetig voraussetzen. Durch sie ist natürlich auch die Bahn des Punktes bestimmt: eine gewisse Raumkurve, deren beide Gleichungen erhalten werden, wenn man die Zeit t aus den drei Gleichungen (38) eliminiert.

Nun definieren wir, wie in § 4, die 3 Größen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = u \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = v \\ \frac{dz}{dt} &= \dot{z} = w \end{aligned}\right| \tag{39}$$

und nennen sie die „Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der Koordinatenachsen“ des Punktes P zur Zeit t. Es sind die Geschwindigkeiten, mit welchen sich die Projektionen von P auf die Koordinatenachsen geradlinig bewegen. Ebenso definieren wir konsequenterweise allgemeiner durch Differentiation von (36) als Geschwindigkeitskomponente von P in einer beliebigen Richtung (ξ', η', ζ') die Geschwindigkeit:

$$\frac{dx'}{dt} = \dot{x}' = u' = u\cos\xi' + v\cos\eta' + w\cos\zeta', \tag{40}$$

mit welcher sich die Projektion des Punktes P auf diese Richtung geradlinig bewegt.

Auf Grund dieser Definition können wir beweisen, daß die Geschwindigkeit ein Vektor ist. Denn setzen wir:

$$u^2 + v^2 + w^2 = q^2, \tag{41}$$

$$\frac{u}{q} = \cos\lambda, \quad \frac{v}{q} = \cos\mu, \quad \frac{w}{q} = \cos\nu, \tag{42}$$

mit der näheren Bestimmung, daß q positiv, und die Richtungswinkel λ, μ, ν zwischen 0 und π liegen, so ist nach (40):

$$u' = q(\cos\lambda\cos\xi' + \cos\mu\cos\eta' + \cos\nu\cos\zeta'),$$

und nach (37):

$$u' = q\cos\varepsilon, \tag{42a}$$

wenn ε den Winkel zwischen den Richtungen (ξ', η', ζ') und (λ, μ, ν) bedeutet. Die Komponente u' ist also die Projektion der in der Richtung (λ, μ, ν) aufgetragenen Strecke q auf die x'-Richtung.

Diese gerichtete Größe nennen wir den „Geschwindigkeitsvektor" und bezeichnen ihn mit dem deutschen Buchstaben:

$$\mathfrak{q} = \dot{\mathfrak{r}}. \tag{43}$$

Die Differentiation eines Vektors $\mathfrak{r}$ nach der Zeit bedeutet also nicht etwa die Differentiation seines absoluten Betrages r, sondern sie bezeichnet wiederum einen Vektor, dessen Komponenten die Differentialquotienten der Komponenten von $\mathfrak{r}$ sind.

Der Vektor $\mathfrak{q}$ hat eine sehr anschauliche geometrische Bedeutung. Durch Berücksichtigung von (39) werden nämlich die Gleichungen (41) und (42):

$$q^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{44}$$

und:

$$\cos\lambda = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\mu = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\nu = \frac{dz}{ds}, \tag{45}$$

wobei ds das Bogenelement der Bahnkurve bedeutet, positiv in der Richtung der Bewegung genommen. Die Richtung von $\mathfrak{q}$ fällt also mit der Richtung des Bogenelements oder der Tangente der Bahnkurve zusammen, und die Größe $q = |\mathfrak{q}|$ ist die Geschwindigkeit der Bewegung auf dieser Kurve. Nach (41) und (42) ist der Vektor $\mathfrak{q}$ nach Betrag und Richtung die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Kantenlängen u, v, w.

§ 19. Wir definieren weiter, wie in § 6, die 3 Größen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \ddot{x} = \frac{du}{dt} = \dot{u} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \ddot{y} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \ddot{z} = \frac{dw}{dt} = \dot{w} \end{aligned}\right. \tag{46}$$

und nennen sie die „Beschleunigungskomponenten in Richtung der Koordinatenachsen" des Punktes P zur Zeit t. Es sind die Be-

schleunigungen, mit welchen sich die Projektionen von P auf die Koordinatenachsen geradlinig bewegen. Ebenso definieren wir konsequenterweise allgemeiner, durch Differentiation von (40), als Beschleunigungskomponente von P in einer beliebigen Richtung (ξ', η', ζ') die Beschleunigung:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \ddot{x}' = \frac{du'}{dt} = \dot{u}' = \dot{u} \cos \xi' + \dot{v} \cos \eta' + \dot{w} \cos \zeta' , \tag{47}$$

mit welcher sich die Projektion des Punktes P auf diese Richtung geradlinig bewegt.

Auf Grund dieser Definition können wir beweisen, daß die Beschleunigung ein Vektor ist. Denn setzen wir:

$$\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 = p^2 , \tag{48}$$

$$\frac{\dot{u}}{p} = \cos \alpha , \quad \frac{\dot{v}}{p} = \cos \beta , \quad \frac{\dot{w}}{p} = \cos \gamma , \tag{49}$$

mit der näheren Bestimmung, daß p positiv, und die Richtungswinkel α, β, γ zwischen 0 und π liegen, so ist nach (47):

$$\dot{u}' = p (\cos \alpha \cos \xi' + \cos \beta \cos \eta' + \cos \gamma \cos \zeta') ,$$

und nach (37):

$$\dot{u}' = p \cos \vartheta , \tag{50}$$

wenn ϑ den Winkel zwischen den Richtungen (ξ' η' ζ') und (α, β, γ) bedeutet. Die Komponente $\dot{u}'$ ist also die Projektion der in der Richtung (α, β, γ) aufgetragenen Strecke p auf die x'-Richtung. Diese gerichtete Größe nennen wir, analog (43), den „Beschleunigungsvektor“:

$$\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}} = \ddot{\mathfrak{r}} . \tag{51}$$

Er wird, wegen (48) und (49), nach Betrag und Richtung durch die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Kantenlängen $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ dargestellt.

§ 20. Durch das Wort „Beschleunigung“ werden Anfänger manchmal zu dem Fehler verleitet, die Größe $|\dot{\mathfrak{q}}| = p$ zu verwechseln mit der Größe $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$. Es ist derselbe Fehler, den man begehen würde, wenn man $q (= |\dot{\mathfrak{r}}|)$ gleich $\frac{dr}{dt}$ setzen wollte. Untersuchen wir daher den Zusammenhang der Größen p und $\dot{q}$ etwas näher. Nach (41) ist durch Differentiation nach der Zeit:

$$q \dot{q} = u \dot{u} + v \dot{v} + w \dot{w} ,$$

also nach (49) und (42):

$$\dot{q} = p (\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu) ,$$

und nach (37):

(52) $$\dot{q} = p \cos(\dot{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}).$$

Durch Vergleichung mit (50) ergibt sich also $\dot{q}$ als die Komponente des Beschleunigungsvektors in der Richtung der Geschwindigkeit. Da die Richtungen $\dot{\mathfrak{q}}$ (α, β, γ) und $\mathfrak{q}$ (λ, μ, ν) voneinander gänzlich unabhängig sind, so kann $\dot{q}$ jeden Wert zwischen $+p$ und $-p$ besitzen. Nur wenn jene beiden Richtungen zusammenfallen, wie bei der geradlinigen Bewegung, ist $\dot{q} = p$. Wenn aber z. B. die Beschleunigung senkrecht steht auf der Geschwindigkeit, so ist $\dot{q} = 0$, d. h. die Größe der Geschwindigkeit q ist konstant, während die Größe der Beschleunigung p jeden beliebigen (positiven) Wert haben kann.

§ 21. Zur näheren Illustration der aufgestellten Definitionen und Sätze wollen wir einen speziellen einfachen Fall ins Auge fassen, nämlich die gleichförmige Kreisbewegung eines Punktes P. Eine solche Bewegung wird dargestellt durch die Gleichungen:

(53) $$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t, \quad z = 0,$$

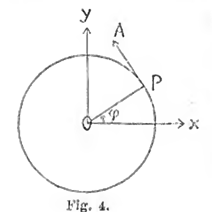


Fig. 4.

wobei r den Radius des Kreises, ω (> 0) die Winkelgeschwindigkeit oder Frequenz (§ 12) bedeutet (Fig. 4). Die Bahn des Kreises ergibt sich durch Elimination von t aus (53):

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 0,$$

die Komponenten der Geschwindigkeit aus (39), mit $\omega t = \varphi$ als Abkürzung:

$$u = -\omega r \sin\varphi, \quad v = \omega r \cos\varphi, \quad w = 0,$$

die Größe und Richtung der Geschwindigkeit PA aus (41) und (42):

$$q = \omega r,$$

$$\lambda = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \mu = \varphi, \quad \nu = \frac{\pi}{2},$$

die Komponenten der Beschleunigung aus (46):

$$\dot{u} = -\omega^2 r\cos\varphi, \quad \dot{v} = -\omega^2 r \sin\varphi, \quad \dot{w} = 0,$$

endlich die Größe und Richtung der Beschleunigung aus (48) und (49):

(54) $$p = \omega^2 r,$$

$$\alpha = \pi - \varphi, \quad \beta = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Der Beschleunigungsvektor ist also von P nach dem Mittelpunkt O gerichtet, und wir haben hier ein Beispiel für den am Schluß des vorigen Paragraphen erörterten Fall, daß die Beschleunigungsrichtung auf der Geschwindigkeitsrichtung senkrecht steht, wodurch die Konstanz von q bedingt wird.

§ 22. Jetzt erst fragen wir nach der Ursache einer Bewegung, indem wir die Kraft einführen, welche die Bewegung hervorruft. Es versteht sich, daß die Definition der Kraft bei einer räumlichen Bewegung diejenige bei einer geradlinigen Bewegung als speziellen Fall enthalten muß. Dadurch sind wir genötigt, im Anschluß an (8) zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} X &= m\dot{u} = m\frac{d^2x}{dt^2} \\ Y &= m\dot{v} = m\frac{d^2y}{dt^2} \\ Z &= m\dot{w} = m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

wobei m wieder die von der Art der Bewegung unabhängige träge Masse des materiellen Punktes P bedeutet; ferner, im Anschluß an (47):

$$X' = m\dot{u}' = X\cos\xi' + Y\cos\eta' + Z\cos\zeta'. \quad (56)$$

Wir definieren also allgemein die Kraftkomponente in irgendeiner Richtung (ξ', η', ζ') als das Produkt der Masse und der Komponente der Beschleunigung in dieser Richtung. Daraus folgt, daß die Kraft ein Vektor ist, dessen Richtung mit der Richtung der Beschleunigung zusammenfällt, und dessen Betrag sich von dem der Beschleunigung nur um den konstanten Faktor m unterscheidet. In der Tat: wenn wir, wie es in der Elektrodynamik üblich ist, den Kraftvektor mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen, also:

$$\mathfrak{F} = m\dot{\mathfrak{q}} = m\ddot{\mathfrak{r}}, \quad (57)$$

setzen, so ergibt sich für den absoluten Betrag F dieses Vektors aus (55) und (48):

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = m^2 p^2, \quad (58)$$

für die Richtung des Vektors, nach (49) und (55):

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = X : Y : Z, \quad (59)$$

und für die Komponente in einer beliebigen Richtung (ξ', η', ζ'), welche mit der Richtung der Kraft den Winkel ϑ bildet, nach (56) und (50):

$$X' = F \cdot \cos\vartheta. \quad (60)$$

Der Kraftvektor $\mathfrak{F}$ wird, wegen (58) und (59), nach Betrag und Richtung durch die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Kantenlängen X, Y, Z dargestellt. Da diese drei Komponenten, wie sich durch Vergleichung von (56) und (60) ergibt, den Kraftvektor $\mathfrak{F}$ vollständig ersetzen, und umgekehrt, so sind sie auch in ursächlicher Beziehung ihm vollkommen äquivalent, d. h. man kann drei in den Richtungen der Koordinatenachsen wirkende Kräfte X, Y, Z nach dem Gesetz des Parallelepipeds zusammensetzen zu einer einzigen Kraft, deren Größe F durch (58) und deren Richtung (α, β, γ) durch (59) bestimmt ist. Ebenso kann man eine beliebig gerichtete Kraft nach demselben Gesetz zerlegen in drei nach den Koordinatenrichtungen wirkende Kräfte.

§ 23. Die Gleichungen (55) oder (57) enthalten das Grundgesetz der Mechanik eines materiellen Punktes. Man kann sie entweder dazu benutzen, um, wenn die Bewegung (38) bekannt ist, die Kraft zu bestimmen, welche diese Bewegung bewirkt, oder umgekehrt, um, wenn die Kraft bekannt ist, die Bewegung zu bestimmen, welche von der Kraft bewirkt wird. Das erstere ist, wie man sieht, eine Aufgabe der Differentialrechnung, das zweite eine Aufgabe der Integralrechnung, also im allgemeinen mathematisch komplizierter.

Behandeln wir zuerst eine Aufgabe der ersteren Art, indem wir nach der Kraft fragen, welche die in § 21 betrachtete gleichförmige Kreisbewegung bewirkt. Dieselbe ergibt sich unmittelbar aus der Kombination der Gleichungen (54) und (58) zu:

$$F = m\omega^2 r, \tag{61}$$

und ist, wie die Beschleunigung, von P nach dem Kreismittelpunkt O gerichtet. Man kann sie realisieren durch einen Faden, an dem man den materiellen Punkt P im Kreise herumschwingt. Dann ergibt F die Spannung des Fadens. Die Gleichung (61) läßt sich auch schreiben:

$$F = \frac{mq^2}{r}, \tag{62}$$

und liefert so ein gutes Beispiel für den Satz, daß die Frage: „Ist F bei einer gleichförmigen Kreisbewegung proportional r oder umgekehrt proportional r?“, gar keinen Sinn hat, so lange nicht angegeben wird, ob dabei ω oder q konstant gedacht ist. Ähnliches gilt für jede Größe, die von mehr als einer Variabeln abhängig ist.

Bei den Anwendungen der Theorie auf Vorgänge in der Natur

handelt es sich meistens um die zweitgenannte Aufgabe, die Bewegung bei gegebener Kraft zu berechnen. Dann ist die Integration von 3 Differentialgleichungen zweiten Grades zu vollziehen, wobei 6 Integrationskonstanten auftreten. Diese werden bestimmt durch den „Anfangszustand" (§ 10) des materiellen Punktes, d. h. durch die Lage und die Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit $t=0$:

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0\,,\quad \mathfrak{q}=\mathfrak{q}_0\,, \tag{63}$$

welche gerade die 6 erforderlichen Bedingungen liefern. Im allgemeinen versteht man unter dem „Zustand" eines materiellen Punktes zu irgendeiner Zeit t den Inbegriff der 6 Größen, welche den Vektor der Lage und den Vektor der Geschwindigkeit für diese Zeit bezeichnen.

Nehmen wir als erstes Beispiel den einfachsten Fall, daß die Kraft $\mathfrak{F}=0$ ist. Dann folgt aus (55) durch einmalige Integration, bei Benutzung des Anfangszustandes (63):

$$\frac{dx}{dt}=u=u_0\,,\quad \frac{dy}{dt}=v=v_0\,,\quad \frac{dz}{dt}=w=w_0\,,$$

und durch nochmalige Integration:

$$x=u_0t+x_0\,,\quad y=v_0t+y_0\,,\quad z=w_0t+z_0\,. \tag{64}$$

Die Bahnkurve ist:

$$\frac{x-x_0}{u_0}=\frac{y-y_0}{v_0}=\frac{z-z_0}{w_0}\,,$$

also eine Gerade, die durch die Anfangslage und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gegeben ist und mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen wird, wie es dem Trägheitsgesetz entspricht. Daraus folgt, daß jede Abweichung der Bewegung eines materiellen Punktes, auch einer mit gleichförmiger Geschwindigkeit, von der geradlinigen Bewegung das Vorhandensein einer gewissen Kraft anzeigt. Für eine gleichförmige Kreisbewegung haben wir dies schon im Vorstehenden bestätigt gefunden.

§ 24. Wenn gleichzeitig mehrere Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3 \cdots$ auf einen materiellen Punkt wirken, so lassen sie sich ersetzen durch eine einzige Kraft $\mathfrak{F}$; denn bei jeder Bewegung des Punktes hat ja seine Beschleunigung einen bestimmten Wert. Man findet diese „resultierende" Kraft $\mathfrak{F}$, wenn man jede der Einzelkräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3 \cdots$ nach (58) und (59) in ihre Komponenten zerlegt:

$$X_1=F_1\cos\alpha_1\,,\quad Y_1=F_1\cos\beta_1\,,\quad Z_1=F_1\cos\gamma_1\,, \tag{65}$$

und dann nach (19) die einer bestimmten Koordinatenrichtung ent-

sprechenden Komponenten durch algebraische Addition zusammensetzt. Dann ergeben sich die 3 Komponenten:

$$X = \Sigma X_1, \quad Y = \Sigma Y_1, \quad Z = \Sigma Z_1 \tag{66}$$

der resultierenden Kraft $\mathfrak{F}$. In der Vektorrechnung bezeichnet man diese Zusammensetzung kurz mit:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3 + \cdots = \Sigma \mathfrak{F}_1, \tag{67}$$

indem man als „Summe von Vektoren" oder „vektorielle" Summe einen Vektor bezeichnet, dessen Komponenten die algebraischen Summen der Komponenten der Einzelvektoren sind. Der absolute Betrag dieser Summe F, welcher die Größe der resultierenden Kraft darstellt, ist selbstverständlich wohl zu unterscheiden von der Summe der Größen $F_1, F_2, F_3, \cdots$ der einzelnen Kräfte.

§ 25. Ehe wir zu weiteren Anwendungen übergehen, wollen wir den allgemeinen ursächlichen Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegung noch etwas anschaulicher gestalten. Auf einen in beliebiger Bewegung begriffenen Punkt, dessen Geschwindigkeitszustand durch den Vektor $\mathfrak{q}$ gegeben sei, wirke eine nach Größe und Richtung beliebig gegebene Kraft $\mathfrak{F}$. Welchen Einfluß übt diese Kraft auf die nun folgende Bewegung? Wäre $\mathfrak{F} = 0$, so würde sich der Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit in gerader Linie weiter bewegen, aber auch nur in diesem Falle. Daraus folgt, daß $\mathfrak{F}$ in einem bestimmten Zusammenhang steht mit der Abweichung der Bewegung von der Gleichförmigkeit und von der Geradlinigkeit.

Welcher Teil von $\mathfrak{F}$ bewirkt die Abweichung von der Gleichförmigkeit, also die Änderung des absoluten Betrags $|\mathfrak{q}| = q$, welcher Teil die von der Geradlinigkeit, also die Änderung der Richtung (λ, μ, ν) von $\mathfrak{q}$?

Die Antwort auf diese Frage ergibt sich am einfachsten aus folgender Rechnung. Wenn wir in den Gleichungen (55) die Größen u, v, w nach (42) und (45) durch $q\frac{dx}{ds}$, $q\frac{dy}{ds}$, $q\frac{dz}{ds}$ ersetzen, so folgt durch Ausführung der Differentiation nach t:

$$\left\{\begin{aligned} X &= m\frac{dq}{dt}\frac{dx}{ds} + mq^2\frac{d^2x}{ds^2} \\ Y &= m\frac{dq}{dt}\frac{dy}{ds} + mq^2\frac{d^2y}{ds^2} \\ Z &= m\frac{dq}{dt}\frac{dz}{ds} + mq^2\frac{d^2z}{ds^2}. \end{aligned}\right. \tag{68}$$

Bezeichnen wir nun die ersten Summanden in diesen Gleichungen mit X_1, Y_1, Z_1, die zweiten mit X_2, Y_2, Z_2, so können wir nach (67) $\mathfrak{F}$ auffassen als die Resultierende zweier Einzelkräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, deren Komponenten durch die 6 genannten Ausdrücke dargestellt werden, also:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 . \tag{69}$$

Die erste Einzelkraft $\mathfrak{F}_1$ hat den absoluten Betrag:

$$F_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = m \left| \frac{dq}{dt} \right| , \tag{70}$$

und ihre Richtung fällt mit der Richtung des Kurvenelements ds oder der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ zusammen.

Die zweite Einzelkraft $\mathfrak{F}_2$ hat den absoluten Betrag:

$$F_2 = m q^2 \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} , \tag{71}$$

und ihre Richtungsverhältnisse sind:

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} . \tag{72}$$

Die beiden Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ stehen aufeinander senkrecht denn es ist:

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} = 0 , \tag{73}$$

wie sich durch Differentiation der Identität:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 , \tag{73a}$$

nach s ergibt. Wir haben also hier die Kraft $\mathfrak{F}$ zerlegt in zwei Komponenten $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, deren erste in der Richtung der Bewegung, deren zweite in einer Richtung senkrecht darauf wirkt; und zwar ist unter allen Normalen der Kurve die Richtung (72) die der „Hauptnormalen", oder derjenigen Normalen, welche in der „Krümmungs-" oder „Oskulationsebene" der Kurve liegt, d. h. in derjenigen Ebene, welche drei aufeinanderfolgende unendlich benachbarte Punkte mit der Kurve gemein hat. Diese drei Punkte bestimmen auch den Kreis, der sich der Kurve möglichst eng anschließt, und dessen Radius daher der „Krümmungsradius" ϱ der Kurve genannt wird. Sein reziproker Wert ist gleich der Quadratwurzel in (71):

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} . \tag{74}$$

Alle diese Ergebnisse können wir physikalisch zusammenfassen wie folgt: Um den Einfluß einer beliebig gegebenen Kraft $\mathfrak{F}$ auf einen mit beliebig gegebener Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ bewegten materiellen Punkt zu finden, zerlege man die Kraft $\mathfrak{F}$ in die beiden Komponenten parallel und senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung. Die erste Komponente, die „Tangentialkraft" $\mathfrak{F}_1$, ergibt nach (70) durch ihren absoluten Betrag F_1 die Änderung der Größe der Geschwindigkeit:

$$\frac{dq}{dt} = \pm \frac{F_1}{m}, \tag{74 a}$$

wobei das +- oder —-Zeichen gilt, je nachdem die Richtung von $\mathfrak{F}_1$ der Richtung der Geschwindigkeit gleich oder entgegengesetzt ist. Die zweite Komponente, die „Normalkraft" $\mathfrak{F}_2$, ergibt durch ihre Richtung die Hauptnormale der Bahnkurve und damit die Krümmungsebene, und durch ihren absoluten Betrag F_2 nach (71) und (74) den Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{mq^2}{F_2}. \tag{75}$$

Da die Normalkraft nach dem Mittelpunkt des Krümmungskreises, dem „Krümmungsmittelpunkt", gerichtet ist, wird sie häufig auch „Zentripetalkraft" genannt. Diese Bezeichnung ist insofern etwas bedenklich, weil sie leicht die Vorstellung hervorruft, als ob diese Kraft in der Richtung nach einem vorgegebenen Ziel, dem Krümmungsmittelpunkt, hin wirkt. Die Sachlage ist aber umgekehrt: primär vorgegeben ist die Kraft $\mathfrak{F}_2$, und die Krümmung wird durch die Kraft erst sekundär erzeugt, sie hängt nach (75) außer von der Kraft auch noch von dem Geschwindigkeitszustand des bewegten Punktes ab. Je schneller sich der Punkt bewegt, um so größer ist ϱ und um so kleiner ist die Krümmung.

Wem die hier benutzten analytischen Relationen, betreffend die Hauptnormale und den Krümmungsradius einer Raumkurve, nicht zur Verfügung stehen, der kann sich die obigen mechanischen Sätze auch auf folgendem, mehr geometrischen Wege ableiten. Aus (56) erhält man durch Differentiation nach t mit Berücksichtigung von (42 a):

$$X' = m\frac{d}{dt}(q\cos\varepsilon) = m\cdot\frac{dq}{dt}\cos\varepsilon - mq\sin\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{76}$$

wo X' die Komponente der Kraft $\mathfrak{F}$ in einer beliebig ausgewählten

konstanten Richtung x' bedeutet, und ε der Winkel ist, den diese Richtung mit der Richtung der Geschwindigkeit q bildet.

Je nachdem man nun die konstante Richtung x' zusammenfallen läßt mit der Tangente ($\varepsilon = 0$) oder der Hauptnormale $\left(\varepsilon = \frac{\pi}{2},\ d\varepsilon = -\frac{ds}{\varrho}\right)$ oder der „Binormale" $\left(\varepsilon = \frac{\pi}{2},\ d\varepsilon = 0\right)$ der Bahnkurve in einem bestimmten Punkt, erhält man aus (76) die Tangentialkraft oder die Normalkraft oder Null, und damit die vorigen Sätze.

Der Zusammenhang zwischen Tangentialkraft und Beschleunigungskomponente $\frac{dq}{dt}$ ist offenbar eine Verallgemeinerung des Gesetzes (8) der geradlinigen Bewegung, der zwischen Normalkraft und Krümmungsradius ϱ ist eine Verallgemeinerung des Gesetzes (62) der gleichförmigen Kreisbewegung.

§ 26. Wir betrachten jetzt die Bewegung eines materiellen Punktes unter dem alleinigen Einfluß seiner Schwerkraft, also die nämliche Aufgabe wie die in § 10 behandelte, nur mit dem Unterschied, daß jetzt die Anfangsgeschwindigkeit q_0 des Punktes nicht vertikal gerichtet zu sein braucht, sondern einen beliebigen Winkel λ_0 $\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ mit der Horizontalen bilden möge. Die Bewegung erfolgt offenbar in derjenigen vertikalen Ebene, welche durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bestimmt ist. Legen wir also, wie künftig in der Regel, die z-Achse in die Richtung nach oben, die x-Achse in die Ebene der Bewegung und den Koordinatenanfangspunkt in die Anfangslage des Punktes, so lauten die vollständigen Bewegungsgleichungen (55):

$$X = 0 = m \cdot \frac{du}{dt}, \quad Z = -mg = m \cdot \frac{dw}{dt}, \tag{76a}$$

mit den Anfangsbedingungen, für $t = 0$:

$$x_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad u_0 = q_0 \cos \lambda_0, \quad w_0 = q_0 \sin \lambda_0.$$

Die erste Integration ergibt, mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = q_0 \cos \lambda_0 \\ w &= \frac{dz}{dt} = -gt + q_0 \sin \lambda_0. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Die zweite Integration ergibt:

$$(78)\quad \begin{cases} x = q_0 \cos\lambda_0 \cdot t \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + q_0 \sin\lambda_0 \cdot t. \end{cases}$$

Durch Elimination von t erhält man hieraus die Gleichung der Bahnkurve:

$$(79)\qquad z = -\frac{g}{2 q_0^2 \cos^2\lambda_0} \cdot x^2 + \operatorname{tg}\lambda_0 \cdot x,$$

eine Parabel, deren Achse der z-Achse parallel ist (Fig. 5).

Ihr zweiter Schnittpunkt mit der x-Achse ergibt die „Wurfweite":

$$OA = \frac{q_0^2 \sin(2\lambda_0)}{g},$$

ihr Maximum $\left(\frac{dz}{dx} = 0\right)$ ergibt die „Wurfhöhe":

$$BC = \frac{q_0^2 \sin^2\lambda_0}{2g}.$$

Wenn q_0 konstant, aber λ_0 veränderlich angenommen wird, so erhält man die größte Wurfweite für $\lambda_0 = \frac{\pi}{4}$, die größte Wurfhöhe für $\lambda_0 = \frac{\pi}{2}$.

Um ein bestimmtes Ziel (x_1, z_1) zu treffen, hat man λ_0 so zu wählen, daß die Gleichung (79) durch $x = x_1$, $z = z_1$ befriedigt wird. Dies ergibt für $\operatorname{tg}\lambda_0$ eine quadratische Gleichung, also entweder zwei oder gar keinen reellen Wert für λ_0, abgesehen vom Grenzfall. Entweder läßt sich also, bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit, das Ziel durch zwei verschiedene Würfe treffen (Flachschuß, Steilschuß), oder, wenn es zu weit entfernt ist, überhaupt nicht.

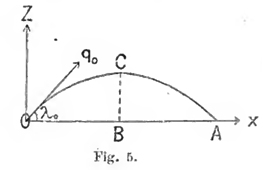


Fig. 5.

Bemerkenswert ist noch die Beziehung, welche angibt, wie groß die Geschwindigkeit q des Punktes an einem bestimmten Ort (x, z) ist. Dieselbe ergibt sich durch Elimination von t aus (77) und (78) und lautet sehr einfach:

$$(80)\qquad q^2 + 2gz = q_0^2.$$

Die Geschwindigkeit q hängt also nur von der Höhe z ab, und die Parabel liegt nicht nur symmetrisch zu ihrer Achse, sondern sie wird auch symmetrisch durchlaufen, da in den beiden Punkten,

welchen der nämliche Wert von z zukommt, auch die Geschwindigkeit wieder die nämliche ist.

§ 27. Um den Luftwiderstand zu berücksichtigen, hat man außer der Schwerkraft noch eine zweite Kraft einzuführen, welche in jedem Augenblicke der gerade vorhandenen Geschwindigkeit entgegengerichtet ist, und deren Größe W in gewisser Weise von q abhängt. Dann lauten die Bewegungsgleichungen, mit Rücksicht auf (66):

$$\left.\begin{aligned} X &= -W\frac{dx}{ds} = -W\frac{u}{q} = m\frac{du}{dt} \\ Z &= -mg - W\frac{dz}{ds} = -mg - W\frac{w}{q} = m\frac{dw}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Ihre Integration kann erst erfolgen, wenn W als Funktion von q bekannt ist. Für kleinere Geschwindigkeiten ist W proportional q (vgl. § 13), für größere ändert sich erfahrungsgemäß W schneller mit q als mit der ersten Potenz. Die Bahn ergibt sich nicht mehr als Parabel, sondern als „ballistische Kurve". Ihre Ausmessung kann umgekehrt dazu dienen, um W als Funktion von q zu bestimmen.

Drittes Kapitel. Zentralkräfte. Potential.

§ 28. Ehe man an die Integration der Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes geht, muß man vor allem die Kraft kennen lernen, die auf ihn wirkt, und der Behandlung dieser Aufgabe ist das gegenwärtige Kapitel gewidmet. Unter allen Kräften der Natur sind am besten erforscht die Zentralkräfte (§ 12), und unter diesen ist hinwiederum die wichtigste diejenige, deren Größe umgekehrt proportional ist dem Quadrat der Entfernung, wie die Newtonsche Gravitation. Mit ihr wollen wir uns daher zunächst beschäftigen. Die Frage nach dem Ursprung der Gravitation können wir hier ganz unerörtert lassen; denn die Bedeutung des Gravitationsgesetzes hängt nicht ab von der Beantwortung dieser Frage, sondern sie beruht darauf, daß dasselbe die Bewegungen aller Himmelskörper bis in die feinsten Einzelheiten in einen sehr einfachen und sehr genauen Ausdruck zusammenfaßt.

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz wird ein materieller Punkt mit der Masse m von einem anderen, in der Entfernung r befindlichen materiellen Punkt mit der Masse μ angezogen mit der Kraft:

$$F = f \cdot \frac{m\mu}{r^2}. \quad (82)$$

Hierbei bedeutet f, die Gravitationskonstante, eine absolute oder universelle Konstante, deren Zahlenwert natürlich von den für Masse, Länge und Zeit festgesetzten Einheiten abhängt, und zwar besitzt f nach (8a) die Dimension:

$$\left[\frac{l^3}{m t^2}\right]. \tag{83}$$

Wir werden den Zahlenwert von f in cm, g, sec später (§ 34) berechnen.

Hätten wir über die Masseneinheit nicht schon willkürlich verfügt, so stände nichts im Wege, die Masseneinheit so zu definieren, daß:

$$f = 1 .$$

Dann wäre die Gravitationskonstante eine reine Zahl, und die Masse wäre keine selbständige Größe, sondern von der Dimension:

$$\left[\frac{l^3}{t^2}\right].$$

Die so definierte Masseneinheit wird der Bequemlichkeit halber in der Astronomie benutzt und heißt daher „astronomische Masseneinheit". Man ersieht hieraus wiederum, daß die Dimension einer physikalischen Größe nicht etwa eine ihrer Natur inhärente, sondern eine durch die Wahl des Maßsystems bedingte konventionelle Eigenschaft ist. Wäre dieser Umstand stets gewürdigt worden, so wäre der physikalischen Literatur, besonders derjenigen der elektromagnetischen Maßsysteme, eine Fülle von unfruchtbaren Kontroversen erspart geblieben.

§ 29. Der Ausdruck (82) gibt nicht nur die Kraft, mit welcher der Punkt m von dem Punkt μ angezogen wird, sondern er stellt auch die Kraft dar, mit welcher der Punkt μ von dem Punkt m angezogen wird, wie übrigens auch schon aus dem symmetrischen Bau des Ausdrucks gefolgert werden kann. Dies ist ein spezieller Fall des dritten Newtonschen Axioms: des Prinzips der Gleichheit von Aktion und Reaktion (oder von Wirkung und Gegenwirkung), welches ganz allgemein besagt, daß jeder Kraft, welche ein materieller Punkt auf einen zweiten ausübt, eine gleichgroße und entgegengesetzt gerichtete entspricht, welche der zweite Punkt auf den ersten ausübt. Ein zur Erde fallender Stein vom Gewicht G zieht die Erde mit der nämlichen Kraft G an wie die Erde den Stein. Daß die Erde sich nicht merklich gegen den Stein hin bewegt, liegt nur an ihrer gegen-

über dem Stein ungeheuren trägen Masse, welche nach (8) durch die Kraft G nur verschwindend wenig beschleunigt wird.

Das dritte Newtonsche Axiom läßt sich in voller Allgemeinheit auf andere Prinzipien zurückführen (vgl. § 129). Für den hier vorliegenden speziellen Fall genügt folgende Betrachtung. Wir denken uns die beiden materiellen Punkte m und μ „starr verbunden", d. h. an den Enden eines inkompressibeln und unausdehnbaren, im übrigen frei beweglichen Stabes von verschwindend kleiner Masse befestigt. Würden nun die von den beiden Punkten aufeinander ausgeübten, in der Fig. 6 durch Pfeile bezeichneten Anziehungskräfte nicht gleichgroß sein, so müßte sich das ganze betrachtete System in der Richtung der größern Kraft in Bewegung setzen, und da die Entfernung r, also auch die Kräfte konstant bleiben, so bliebe auch ihre Differenz konstant, und die Geschwindigkeit würde daher im Lauf der Zeit über alle Grenzen hinaus wachsen. Ein solcher Vorgang ist aber in der Natur unmöglich.

Fig. 6.

§ 30. *Bezeichnen wir die Koordinaten des* Punktes m (Fig. 6) mit x, y, z, die des Punktes μ mit ξ, η, ζ, so sind die Komponenten der Gravitationskraft, welche auf m wirkt:

$$\left.\begin{aligned} X &= f\frac{m\mu}{r^2}\cdot\frac{\xi - x}{r} \\ Y &= f\frac{m\mu}{r^2}\cdot\frac{\eta - y}{r} \\ Z &= f\frac{m\mu}{r^2}\cdot\frac{\zeta - z}{r} \end{aligned}\right\} \quad (84)$$

wobei:

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2. \quad (85)$$

Wie man sich leicht durch Betrachtung einfacher Spezialfälle überzeugen kann, ergeben diese Ausdrücke auch das Vorzeichen der Komponenten für alle Lagen der beiden Punkte richtig, falls die Größe r stets positiv genommen wird.

Wenn der Punkt m von mehreren anderen Punkten mit den Massen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots$ zugleich angezogen wird, so sind die Komponenten der resultierenden Kraft, die auf ihn wirkt, nach (66) und (84):

$$X = fm\cdot\sum\frac{\mu_1(\xi_1 - x)}{r_1^3} \text{ usw.}, \quad (86)$$

wobei die Summation über die Indizes $1, 2, 3, \cdots$ zu erstrecken ist.

§ 31. Wir wollen nun annehmen, daß die anziehenden Massen einen endlichen Raum stetig ausfüllen, d. h. wir wollen die Gravitationswirkung eines endlich ausgedehnten materiellen Körpers auf einen materiellen Punkt berechnen. Dies Problem läßt sich auf das vorige zurückführen, indem wir den materiellen Körper durch eine dreifach unendliche Schar von Ebenen, parallel den Koordinatenebenen, in eine dreifach unendliche Anzahl von Volumenelementen zerlegen, deren jedes eine Masse μ enthält, die als materieller Punkt betrachtet werden kann. Um μ zu finden, denken wir uns zunächst, der Körper sei „homogen", d. h. er enthalte in gleichen Volumina gleiche Massen. Dann ist das Verhältnis irgendeines Massenteils zu dem Volumen, das er einnimmt, eine Konstante, und gleich dem Quotienten der Masse M des ganzen Körpers durch sein Volumen V:

$$\frac{M}{V} = k.$$

Die Konstante k ist die „Dichte" des homogenen Körpers.

Ist aber der Körper nicht homogen, so bezeichnet man das Verhältnis irgendeines Massenteils ΔM zu dem Volumen ΔV, das er einnimmt, als die „mittlere Dichte" des Körpers in dem betreffenden Volumen. Die mittlere Dichte ist im allgemeinen abhängig von der Lage, Größe und Form des betreffenden Volumens. Läßt man nun das Volumen ΔV unbegrenzt abnehmen, bis es zum Volumenelement dV wird, wobei auch die darin enthaltene Masse zu einem materiellen Punkt μ zusammenschrumpft, so geht die mittlere Dichte über in die lokale Dichte:

$$\frac{\mu}{dV} = k, \tag{87}$$

welche nur mehr vom Ort ξ, η, ζ, nicht aber von der Größe und der Form des Volumenelements:

$$dV = d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \tag{88}$$

abhängt.

Ist k als Funktion von ξ, η, ζ gegeben, so ist die Massenverteilung im ganzen Körper vollständig bestimmt. Insbesondere ist die Gesamtmasse des Körpers nach (87):

$$M = \Sigma\mu = \int k\,dV. \tag{89}$$

Die Substitution des Wertes von μ aus (87) in (86) ergibt die

Komponenten der Anziehungskraft, die der materielle Punkt m durch einen stetig ausgedehnten materiellen Körper von gegebener Dichte k erfährt:

$$X = fm \int \frac{(\xi - x)\, k\, dV}{r^3} \text{ usw.}, \tag{90}$$

wobei:

$$r = + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}. \tag{91}$$

Die Integration ist über alle Punkte ξ, η, ζ des Körpers zu erstrecken, wobei k als gegebene Funktion von ξ, η, ζ zu denken ist, während die Größen x, y, z bei der Integration konstant bleiben.

§ 32. Als Beispiel berechnen wir die Anziehung, welche eine materielle Kugel von gegebener Dichte k auf den materiellen Punkt m ausübt. Für die Ausführung der Integration in (90) ist es zweckmäßig, statt der geradlinigen Koordinaten ξ, η, ζ Polarkoordinaten ϱ, ϑ, φ einzuführen, deren Bedeutung sich an Fig. 3 (§ 17) erläutern läßt wie folgt. Wenn die Polarkoordinaten ϱ, ϑ, φ sich auf den Punkt P beziehen, so ist ϱ (positiv) die Strecke OP, ϑ (zwischen 0 und π) der Winkel zwischen der z-Achse und der Richtung OP, φ (zwischen 0 und 2π) der Winkel zwischen der xz-Ebene AOz und der den Punkt P enthaltenden Ebene BOz, in der Richtung von der xz-Ebene zur yz-Ebene gerechnet. Daraus ergeben sich eindeutig die Beziehungen zwischen den Polarkoordinaten und den geradlinigen Koordinaten ξ, η, ζ des Punktes P:

$$\xi = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi, \quad \eta = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi, \quad \zeta = \varrho \cos\vartheta. \tag{92}$$

Entsprechend den eingeführten Polarkoordinaten nehmen wir auch die Teilung des Körpers in Volumenelemente dV vor. Zunächst teilen wir die ganze Kugel in unendlich dünne konzentrische Kugelschichten, von denen eine den inneren Radius ϱ, den äußeren Radius $\varrho + d\varrho$ hat, und berechnen zunächst die Anziehung der in dieser Kugelschicht enthaltenen Masse auf den Punkt m, d. h. wir erstrecken die Integration in (90) nur auf die Volumenelemente dV dieser Kugelschicht. Dann bleibt ϱ und $d\varrho$ bei der Integration konstant, und wir haben nur über ϑ und φ zu integrieren. Um nun dV durch die Polarkoordinaten auszudrücken, teilen wir die Kugelschicht weiter durch unendlich viele unendlich benachbarte Flächen $\vartheta = \text{const.}$ und $\varphi = \text{const.}$ Die ersteren sind einfache Rotationskegel um die z-Achse mit der Spitze in O, die

letzteren sind Halbebenen, die von der z-Achse begrenzt werden. Zwei benachbarte Kegel ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ schneiden zwei parallele Breitenkreise, zwei benachbarte Ebenen φ und $\varphi + d\varphi$ schneiden zwei halbe Meridian- oder Längenkreise auf der Kugel ϱ aus (Fig. 7). Dadurch wird ein rechtwinkliges Flächenelement abgegrenzt, dessen Inhalt dargestellt wird durch das Produkt des Bogenelements auf dem Längenkreise: $\varrho \cdot d\vartheta$ und des Bogenelements auf dem Breitenkreise: $\varrho \sin\vartheta \cdot d\varphi$, und hieraus ergibt sich durch Multiplikation mit $d\varrho$ das Volumenelement der Kugelschicht:

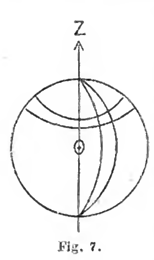


Fig. 7.

$$dV = \varrho^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \cdot d\varrho. \tag{93}$$

Um die Ausführung der Rechnung zu erleichtern, nehmen wir den angezogenen Punkt m auf der positiven z-Achse befindlich an, was offenbar der Allgemeinheit des physikalischen Falles keinen Eintrag tut, d. h.:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z > 0. \tag{94}$$

Dann ist, wie physikalisch leicht einzusehen, $X = 0$, $Y = 0$, und die ganze Anziehung reduziert sich auf die Komponente Z, welche sich nach (90) mit Berücksichtigung von (92) und (93) folgendermaßen ergibt:

$$Z = fm\varrho^2 d\varrho \cdot \int\int \frac{\varrho\cos\vartheta - z}{r^3} \cdot k \sin\vartheta \cdot d\vartheta\, d\varphi.$$

Nun wollen wir die Kugelschicht homogen, d. h. die Dichte k von ϑ und φ unabhängig annehmen. Dann tritt k vor das Integralzeichen, und die Integration über φ von 0 bis 2π läßt sich ausführen:

$$Z = 2\pi fmk\varrho^2 d\varrho \cdot \int_0^\pi \frac{\varrho\cos\vartheta - z}{r^3} \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Das letzte Integral läßt sich leicht berechnen, wenn man r als Integrationsvariable benutzt. Hierbei ist nach (91), (92) und (94):

$$r^2 = \varrho^2 + z^2 - 2\varrho z\cos\vartheta, \tag{95}$$

und daraus, bei konstantem ϱ und z:

$$r\,dr = \varrho z \sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{96}$$

Folglich, durch Einführung von r und dr statt ϑ und $d\vartheta$:

$$Z = 2\pi f m k \varrho d\varrho \cdot \int\limits_{r_0}^{r_1} \left(\frac{\varrho^2 + z^2 - r^2}{2z} - z \right) \cdot \frac{dr}{z r^2}.$$

Hier sind r_0 und r_1 die Werte von r für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, also nach (95), da $r > 0$:

$$r_0 = |z - \varrho|, \quad r_1 = z + \varrho. \tag{97}$$

Die Ausführung der Integration ergibt:

$$Z = -\frac{\pi f m k \varrho d\varrho}{z^2} \cdot \left\{ r_1 - r_0 - (\varrho^2 - z^2) \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \right\}.$$

Um r_0 auswerten zu können, müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1. Fall. $z > \varrho$, d. h. der Punkt m befindet sich außerhalb der Kugelschicht.

Dann ist $r_0 = z - \varrho$, und:

$$Z = -\frac{4\pi f m k \varrho^2 d\varrho}{z^2} = -\frac{f m \cdot dM}{z^2}, \tag{97a}$$

wenn man mit dM die Gesamtmasse der Kugelschicht bezeichnet. Die Anziehung einer homogenen Kugelschicht auf einen materiellen Punkt außerhalb derselben ist also ebenso groß, als ob die Masse der Schicht im Mittelpunkt der Kugel vereinigt wäre.

2. Fall. $z < \varrho$, d. h. der Punkt m befindet sich im inneren Hohlraum.

Dann ist $r_0 = \varrho - z$, und:

$$Z = 0. \tag{97b}$$

Die Anziehung einer homogenen Kugelschicht auf einen materiellen Punkt im Innern derselben ist also gleich Null.

— **§ 33.** Die für die Gravitationswirkung einer homogenen unendlich dünnen Kugelschicht gewonnenen Resultate lassen sich unmittelbar verwerten für die Berechnung der Anziehung einer Kugelschicht von endlicher Dicke, wobei auch die Vollkugel als Spezialfall inbegriffen ist. Vorausgesetzt muß nur werden, daß die Dicke k von den Winkeln ϑ und φ unabhängig ist, während k vom Radiusvektor ϱ beliebig abhängen kann.

Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung einer homogenen Hohlkugel mit den Radien ϱ_1 und $\varrho_2 > \varrho_1$, indem wir ihre Anziehung auf einen Massenpunkt m in der Entfernung r_0 vom Kugelzentrum berechnen. Dann sind drei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall. Der Punkt m liegt außerhalb der Hohlkugel. $r_0 > \varrho_2$.

Dann wirkt jede der konzentrischen unendlich dünnen Kugelschichten ebenso, als ob ihre Masse im Kugelzentrum vereinigt wäre. Also wirkt auch die ganze Masse:

$$M = \frac{4}{3}\pi(\varrho_2^3 - \varrho_1^3)k$$

der Hohlkugel ebenso, und die Anziehung wird:

$$F_1 = \frac{4}{3}\pi f m k \cdot \frac{\varrho_2^3 - \varrho_1^3}{r_0^2}. \tag{98}$$

2. Fall. Der Punkt m liegt irgendwo im inneren Hohlraum.

$$r_0 < \varrho_1.$$

Dann ist die Anziehung:

$$F_2 = 0. \tag{99}$$

3. Fall. Der Punkt m liegt innerhalb der Massenschicht.

$$\varrho_2 > r_0 > \varrho_1.$$

Dann lege man durch den Punkt m die konzentrische Kugelfläche mit dem Radius r_0, welche die ganze Hohlkugel in zwei Teile teilt, eine innere Hohlkugel mit den Radien ϱ_1 und r_0, und eine äußere Hohlkugel mit den Radien r_0 und ϱ_2. Die Anziehung der letzteren ist nach (99) gleich Null, es bleibt also allein übrig die Anziehung der ersteren, welche nach (98) ausgedrückt wird durch:

$$F_3 = \frac{4}{3}\pi f m k \cdot \frac{r_0^3 - \varrho_1^3}{r_0^2}. \tag{100}$$

Es ist von Interesse, zu untersuchen, wie sich der Betrag F der Anziehung verändert, wenn der angezogene Punkt m aus unendlicher Entfernung ($r_0 = \infty$) kommend sich der Hohlkugel nähert und durch die Massenschicht hindurch in den inneren Hohlraum rückt, bis $r_0 = 0$ wird. Zuerst gilt die Formel (98), dann die Formel (100), endlich die Formel (99). Dabei ist besonders wichtig, daß für die Grenzfälle $r_0 = \varrho_2$ und $r_0 = \varrho_1$ die sich ablösenden Formeln jedesmal den nämlichen Wert von F liefern, nämlich für $r_0 = \varrho_2$ den Wert:

$$F_1 = F_3 = \frac{4}{3}\pi f m k \cdot \frac{\varrho_2^3 - \varrho_1^3}{\varrho_2^2}, \tag{101}$$

und für $r_0 = \varrho_1$ den Wert:

$$F_3 = F_2 = 0.$$

Die Anziehungskraft F ändert sich also durchaus stetig mit der Lage des Punktes m, auch wenn derselbe durch die Oberfläche

der anziehenden Masse hindurchgeht. Dieser Satz besitzt offenbar allgemeine Gültigkeit, auch für nichtkugelförmige Massen; denn wenn die Anziehung F an der Oberfläche einer anziehenden Masse unstetig wäre, d. h. auf beiden Seiten derselben verschiedene Werte besäße, so könnte der eintretende Sprung nur von der Gravitationswirkung derjenigen an der Oberfläche liegenden Massenteilchen herrühren, welche dem Punkt m zunächst liegen; diese lassen sich aber mit einer hier genügenden Annäherung als Stück einer homogenen Kugel von entsprechender Dichte denken, für welchen Fall die Stetigkeit oben bewiesen ist. —

Für eine Vollkugel vom Radius R ist $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = R$, und die Anziehung auf einen Punkt m in der Entfernung $r_0 < R$ vom Mittelpunkt wird nach (100):

$$F = \frac{4}{3} \pi f m k r_0 , \tag{102}$$

d. h. die Anziehung einer homogenen Kugel auf einen Massenpunkt im Innern derselben ist direkt proportional seiner Entfernung vom Mittelpunkt, und unabhängig vom Radius der Kugel. Den größten Wert erreicht die Anziehung an der Oberfläche der Kugel.

§ 34. Ein wichtiges Beispiel für die gefundenen Sätze bietet die Gravitationswirkung der Erde auf einen Massenpunkt m an ihrer Oberfläche; denn diese stellt das Gewicht $G = mg$ des Massenpunktes dar (§ 10). Zwar ist die Erde sicherlich nicht homogen, aber ihre Dichte k wird wesentlich nur von ϱ, nicht aber von der Richtung (ϑ, φ) abhängig sein, so daß die Erdkugel in konzentrische unendlich dünne homogene Schichten zerlegt gedacht werden kann. Demnach ist ihre Anziehungskraft auf einen Punkt m an der Oberfläche:

$$\frac{f m M}{R^2} = m g ,$$

wenn R den Radius, M die Masse der Erde bedeutet, oder:

$$\frac{f M}{R^2} = g . \tag{103}$$

Hier sind g und R als direkt meßbar anzusehen, woraus sich dann der Wert von fM ergibt. Dagegen lassen sich die beiden Faktoren fM nicht trennen ohne eine besondere Messung. Die Aufgabe, die Masse M der Erde zu bestimmen, ist also wesentlich identisch mit der Aufgabe, die Gravitationskonstante f zu bestimmen. Es geschieht dies durch Messung der Gravitations-

wirkung irgendeiner bekannten Masse, z. B. eines Gebirges von bekannter Form und Dichte, oder eines Bleiklotzes. Die Masse M der Erde drückt man gewöhnlich so aus, daß man ihre mittlere Dichte angibt:

$$k_m = \frac{M}{V} = 5{,}5 \left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right]. \tag{104}$$

Da die Dichte der an der Erdoberfläche lagernden Gesteinsmassen nur ungefähr 2,5 beträgt, so nimmt die Dichte der Erde nach dem Erdmittelpunkt hin stark zu.

Der Zahlenwert (104) entspricht nach (103) der Größe der Gravitationskonstanten:

$$f = 6{,}7 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g\,sec}^2}\right]. \tag{105}$$

§ 35. Wir kehren nun zu dem allgemeinen Fall beliebiger Zentralkräfte zurück, indem wir die resultierende Anziehung eines beliebig gelagerten Systems von Massen auf einen einzelnen Massenpunkt P betrachten. Die wirkenden Massenpunkte, deren Koordinaten wieder ξ, η, ζ seien, nehmen wir als ruhend an, den Punkt P aber, auf den die Wirkung ausgeübt wird, und der deshalb auch als „Aufpunkt" bezeichnet wird, als beweglich, seine Koordinaten x, y, z daher als veränderlich. Es handelt sich um die Frage, wie sich die Anziehung nach Größe und Richtung ändert, wenn sich der Aufpunkt P im Raume irgendwie bewegt.

Der Allgemeinheit halber setzen wir nicht gerade das Newtonsche Gravitationsgesetz, sondern ein beliebiges Anziehungsgesetz voraus, indem wir die Größe der Anziehung, welche ein Punkt ξ, η, ζ auf den Punkt P ausübt, gleich irgendeiner Funktion $f(r)$ der Entfernung r setzen. Für das Newtonsche Gravitationsgesetz geht dann $f(r)$ in (82) über. Für das allgemeinere Kraftgesetz ergeben sich dann die Komponenten der resultierenden Anziehung eines Systems von Massenpunkten ξ, η, ζ auf den Punkt P, nach dem Muster der Gleichungen (84) und (86), folgendermaßen:

$$\left\{\begin{aligned} X &= \Sigma f(r_1) \cdot \frac{\xi_1 - x}{r_1}, \\ Y &= \Sigma f(r_1) \cdot \frac{\eta_1 - y}{r_1}, \\ Z &= \Sigma f(r_1) \cdot \frac{\zeta_1 - z}{r_1}. \end{aligned}\right. \tag{106}$$

Die Summation ist über die Ordnungszahlen 1, 2, 3 .... der anziehenden Massen zu erstrecken. Auch der Fall abstoßender

Kräfte ist in diesen Gleichungen mit enthalten, man braucht dann nur f negativ zu nehmen. Wenn die wirkenden Massen stetig auf einen endlichen Raum verteilt sind, so treten an die Stelle der Summen Integrale, wie oben in § 31. Auch für diesen Fall gelten die nun folgenden Betrachtungen.

§ 36. Um den Einfluß einer Ortsveränderung des Aufpunktes P auf die Größe und Richtung der auf ihn wirkenden Anziehungskraft festzustellen, haben wir die Komponenten X, Y, Z der resultierenden Kraft als Funktionen der Koordinaten x, y, z des Aufpunktes zu untersuchen. Da zeigt sich nun das wichtige Resultat daß die drei Funktionen X, Y, Z sich stets auf eine einzige Funktion zurückführen lassen.

Setzen wir nämlich:

$$\int f(r) \cdot dr = F(r), \tag{107}$$

und:

$$U = F(r_1) + F(r_2) + \cdots = \Sigma F(r_1), \tag{108}$$

so folgt, wenn wir die so definierte Funktion U etwa nach x differentiieren:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sum \frac{\partial F(r_1)}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial x} = \sum f(r_1) \cdot \frac{\partial r_1}{\partial x}.$$

Nun ist nach (85) durch partielle Differenziation nach x:

$$r_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} = x - \xi_1. \tag{109}$$

Dies in die letzte Gleichung eingesetzt, ergibt mit Rücksicht auf (106) die Beziehung:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \text{ebenso:} \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{und} \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{110}$$

Die Funktion U, deren negative nach x, y, z genommenen Abgeleitete die Kräftekomponenten darstellen, heißt das Potential der wirkenden Massen auf den Punkt P. In ihr bleibt eine additive Konstante unbestimmt, wegen der unbestimmten unteren Grenze des Integrals (107). Diese Konstante hat offenbar keinerlei physikalische Bedeutung.

Für den speziellen Fall der Newtonschen Gravitation geht $f(r)$ in (82) über, demnach wird nach (107):

$$F(r) = -f\frac{m\mu}{r},$$

und das Gravitationspotential lautet nach (108):

$$U = -fm\sum\frac{\mu_1}{r_1}. \tag{111}$$

Hier ist über die additive Konstante der Einfachheit halber in der Weise verfügt, daß U verschwindet, wenn der Aufpunkt P in unendliche Entfernung von allen anziehenden Massen rückt.

Durch die Einführung des Potentials wird die Behandlung des ganzen Anziehungsproblems ungemein vereinfacht, da nun statt 3 Funktionen nur eine einzige zu untersuchen ist. Außerdem bietet das Potential gegenüber der Kraft selbst noch mehrfache Vorteile, so z. B., daß es einfach und symmetrisch gebaut ist, und daß bei der Zusammensetzung der Wirkungen mehrerer Massen die Potentiale sich einfach addieren, während die Kräfte erst in die Komponenten zerlegt werden müssen. Derartige Größen, wie das Potential U und die Masse m, die keine Richtung besitzen, sondern durch einen einzigen Zahlenwert vollständig definiert sind, bezeichnet man zum Unterschied von Vektorgrößen als „skalare" Größen.

Wenn die anziehenden Massen stetig im Raum verteilt sind, mit einer als Funktion von ξ, η, ζ gegebenen Dichte k, so verwandelt sich nach (87) die Summe (111) in das Integral:

$$U = -fm\int\frac{k\,dV}{r}. \tag{112}$$

Hier ist dV durch (88), r durch (91) gegeben, und die Integration ist über alle Punkte ξ, η, ζ des von den anziehenden Massen erfüllten Raumes zu erstrecken. Da r stets > 0 ist, so ist das Gravitationspotential U eine wesentlich negative Größe.

§ 37. Um die Vorteile der Einführung des Potentials hervortreten zu lassen, behandeln wir jetzt dasselbe Beispiel, wie oben in § 32: die Anziehung einer unendlich dünnen homogenen Kugelschicht auf einen in der positiven z-Achse befindlichen Aufpunkt, mittelst des Potentials. Die Bezeichnungen bleiben dieselben wie dort. Dann ist nach (112) und (93):

$$U = -fmk\varrho^2 d\varrho\int\int\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{r}.$$

Die Integration nach φ, von 0 bis 2π, läßt sich unmittelbar ausführen. Statt ϑ führen wir nach (95) und (96) wieder r als Integrationsvariable ein, und erhalten dann leicht:

$$U = -2\pi f m k \varrho d\varrho \cdot \frac{r_1 - r_0}{z},$$

wo r_0 und r_1 durch (97) gegeben sind.

Nun müssen wir wieder die beiden Fälle unterscheiden:

1. Fall. $z > \varrho$, d. h. der Aufpunkt befindet sich außerhalb der Kugelschicht. Dann ist $r_0 = z - \varrho$, und:

$$U = -\frac{4\pi f m k \varrho^2 d\varrho}{z} = -f\frac{m \cdot dM}{z}, \tag{113}$$

wenn dM wieder die Masse der Kugelschicht bezeichnet. Also ist das Potential einer homogenen Kugelschicht auf einen Massenpunkt außerhalb derselben ebenso groß, als ob die Masse der Schicht im Kugelmittelpunkt vereinigt wäre, und die Anziehungskraft wird nach (110):

$$Z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -f\frac{m \cdot dM}{z^2}$$

übereinstimmend mit (97a).

2. Fall. $z < \varrho$, d. h. der Aufpunkt befindet sich im inneren Hohlraum. Dann ist $r_0 = \varrho - z$, und:

$$U = -4\pi f m k \varrho d\varrho = -f\frac{m \cdot dM}{\varrho}. \tag{114}$$

Also ist das Potential einer homogenen Kugelschicht auf einen Massenpunkt im inneren Hohlraum unabhängig von seiner Entfernung z vom Zentrum, und ebensogroß, als ob er sich im Zentrum befände. In der Tat ist er dann von allen Massenelementen der Schicht gleichweit entfernt, und das Potential, die Summe der Einzelpotentiale, ergibt sich einfach durch Division der Gesamtmasse dM aller Elemente durch die gemeinsame Entfernung ϱ.

Für die Anziehungskraft erhält man wieder nach (107):

$$Z = -\frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

übereinstimmend mit (97b).

§ 38. Berechnen wir nun auch das Potential einer homogenen Hohlkugel mit den Radien ϱ_1 und $\varrho_2 > \varrho_1$ auf einen Massenpunkt m in der Entfernung r_0 vom Zentrum. Hier sind wieder, wie in § 33, drei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall. Der Punkt m liegt außerhalb der Hohlkugel. $r_0 > \varrho_2$. Dann wirkt jede der konzentrischen unendlich dünnen Kugelschichten ebenso, als ob ihre Masse im Zentrum vereinigt wäre.

Also wirkt auch die ganze Masse der Hohlkugel ebenso, und das Potential wird:

$$U_1 = -\frac{4\pi}{3} f m k \cdot \frac{\varrho_2^3 - \varrho_1^3}{r_0}. \tag{115}$$

2. Fall. Der Punkt m liegt irgendwo im inneren Hohlraum. $r_0 < \varrho_1$.

Dann ist das Potential unabhängig von r_0, und ebenso groß, als ob m im Zentrum läge, nämlich nach (114), durch Integration über alle Kugelschichten:

$$U_2 = -4\pi f m k \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \varrho \, d\varrho,$$

$$U_2 = -2\pi f m k (\varrho_2^2 - \varrho_1^2). \tag{116}$$

3. Fall. Der Punkt m liegt innerhalb der Massenschicht.

$$\varrho_2 > r_0 > \varrho_1.$$

Dann lege man durch den Punkt m die konzentrische Kugelfläche mit dem Radius r_0, welche die ganze Hohlkugel in zwei Teile teilt, eine innere Hohlkugel mit den Radien ϱ_1 und r_0, und eine äußere Hohlkugel mit den Radien r_0 und ϱ_2. Das Potential der inneren Hohlkugel ergibt sich aus (115), das der äußeren aus (116), mit Berücksichtigung der bezüglichen Radien; also das gesuchte Potential, als Summe der beiden Teilpotentiale:

$$U_3 = -\frac{2\pi}{3} f m k \left(3\varrho_2^2 - \frac{2\varrho_1^3}{r_0} - r_0^2\right). \tag{117}$$

Wenn der Aufpunkt m aus unendlicher Entfernung ($r_0 = \infty$) kommend sich der Hohlkugel nähert und durch die Massenschicht hindurch in den inneren Hohlraum rückt, so gilt zunächst die Formel (115), dann die Formel (117), endlich die Formel (116). Für die Grenzfälle $r_0 = \varrho_2$ und $r_0 = \varrho_1$ liefern die sich ablösenden Formeln jedesmal den nämlichen Wert von U, nämlich für $r_0 = \varrho_2$ den Wert:

$$U_1 = U_3 = -\frac{4\pi}{3} f m k \left(\varrho_2^2 - \frac{\varrho_1^3}{\varrho_2}\right), \tag{118}$$

und für $r_0 = \varrho_1$ den Wert:

$$U_3 = U_2 = -2\pi f m k (\varrho_2^2 - \varrho_1^2).$$

Das Potential U ändert sich also durchaus **stetig** mit der Lage des Aufpunktes m, auch wenn derselbe durch die Oberfläche der anziehenden Masse hindurchgeht, und es ist leicht einzusehen,

durch eine ähnliche Überlegung wie in § 33, daß dieser Satz auch für nichtkugelförmige und nichthomogene Massen gilt.

Für eine Vollkugel vom Radius R ist $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = R$, und das Gravitationspotential auf einen Punkt m in der Entfernung $r_0 < R$ vom Mittelpunkt wird nach (117):

$$U = -\frac{2\pi}{3} f m k (3R^2 - r_0^2). \tag{119}$$

§ 39. Gehen wir nun auf die physikalische Bedeutung des Potentials etwas näher ein, wobei wir uns nicht auf die Gravitation beschränken, sondern, dem Ausdruck (108) entsprechend, ein beliebiges Anziehungsgesetz voraussetzen wollen. Jedem Punkt x, y, z des Raumes, als Aufpunkt betrachtet, ist ein bestimmter Wert des Potentials U zugeordnet, und nach Gleichung (110) wirkt eine jede der drei Kraftkomponenten nach derjenigen Seite, nach welcher U abnimmt; denn wenn z. B. U nach der Seite der positiven x zunimmt, so ist X negativ. Dabei ist die Kraftkomponente um so größer, je stärker U sich mit der betreffenden Koordinate ändert, sie ist gleich dem „Potentialgefälle" in der betreffenden Richtung. Man kann dies auch so ausdrücken, daß man sagt: die Anziehungskraft strebt danach, das Potential U zu verkleinern.

Da jede Richtung im Raume als Koordinatenachse gewählt werden kann, so gilt auch für jede beliebige Richtung x':

$$X' = -\frac{dU}{dx'}. \tag{120}$$

Um dies auch auf mehr analytischem Wege zu zeigen, bilden wir den Differentialquotienten:

$$\frac{dU}{dx'} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx'} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dx'} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dx'}. \tag{120a}$$

Hier sind die zweiten Faktoren der drei Produkte die cos der Winkel ξ', η', ζ', welche die Richtung x' mit den Koordinatenachsen bildet, wie man aus der Fig. 8 ersehen kann, wo $PA = dx'$, $PB = dx$ und der Winkel bei $P = \xi'$ ist.

Also, mit Berücksichtigung von (110):

$$\frac{dU}{dx'} = -(X \cos \xi' + Y \cos \eta' + Z \cos \zeta'),$$

woraus sich nach (56) unmittelbar (120) ergibt.

Fig. 8.

Die angestellte Betrachtung zeigt zugleich ganz allgemein, daß die Differentialquotienten irgendeiner skalaren Funktion U von

x, y, z nach den verschiedenen Richtungen des Raumes stets die Komponenten eines Vektors vorstellen, den man als den räumlichen „Gradienten von U“ bezeichnet: grad U. Wir können mithin die Gleichungen (110) in der Vektorsprache abgekürzt schreiben:

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{grad} U \,. \tag{121}$$

§ 40. Die beste Anschauung davon, wie die Anziehungskraft $\mathfrak{F}$ nach Größe und Richtung von der Lage des Aufpunktes abhängt, gewährt die graphische Darstellung. Man denke sich in jedem Aufpunkt den dazugehörigen Wert des Potentials U notiert, und fasse nun alle diejenigen Aufpunkte zusammen, welche einen bestimmten Wert des Potentials, etwa c, besitzen. Die Koordinaten dieser Punkte genügen dann der Gleichung:

$$U = c \,,$$

d. h. die Punkte bilden eine Fläche, welche als „Fläche konstanten Potentials“ oder als „Niveaufläche“ bezeichnet wird. Jedem Wert der Konstanten c entspricht eine bestimmte Niveaufläche, und durch Variieren von c zwischen $-\infty$ und $+\infty$ erhält man alle möglichen Niveauflächen, welche den ganzen unendlichen Raum erfüllen. Dabei kann eine Niveaufläche auch aus mehreren voneinander ganz getrennten Schalen bestehen; aber nie können sich zwei verschiedene Niveauflächen schneiden.

Wenn alle wirkenden Massen im Endlichen liegen, und das Potential einer Masse auf einen unendlich entfernten Aufpunkt gleich Null ist, wie bei der Gravitation, so ist für alle unendlich entfernten Aufpunkte $U = 0$, d. h. die unendlich entfernte Kugelfläche ist eine Niveaufläche. Dann geht keine der übrigen Niveauflächen ins Unendliche, sondern alle sind geschlossene Flächen (Fig. 9), deren Form natürlich von der Lage der wirkenden Massen abhängt.

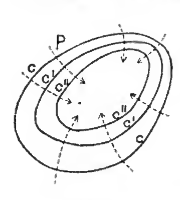


Fig. 9.

Aus dem Bilde der Niveauflächen gewinnt man nun unmittelbar eine anschauliche Vorstellung von den charakteristischen Eigenschaften des Kraftfeldes, d. h. von der Größe und der Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ in jedem beliebigen Aufpunkt. Nehmen wir nämlich den Aufpunkt P (Fig. 9), durch den die Niveaufläche $U = c$ gehen möge, und legen durch ihn die Tangentialebene zur Fläche, so ist, wenn dx' eine in der Tangen-

tialebene gelegene unendlich kleine Verschiebung des Aufpunktes bedeutet:

$$\frac{dU}{dx'} = 0,$$

und nach (120): $X' = 0$, d. h. die Komponente der Kraft $\mathfrak{F}$ in der Richtung irgendeiner Tangente der Niveaufläche ist gleich Null. oder die Kraft steht senkrecht auf der Tangentialebene. Bezeichnet also n die Normale der Niveaufläche, gemessen in der Richtung von $\mathfrak{F}$, so ist die Komponente von $\mathfrak{F}$ in der Richtung n zugleich die ganze resultierende Kraft:

$$F = -\frac{dU}{dn}. \qquad (122)$$

Die Größe F ist im allgemeinen an verschiedenen Punkten der Niveaufläche verschieden groß. Auch hierfür liefert das Bild der Niveauflächen ein anschauliches Gesetz. Betrachten wir zwei dicht nebeneinander liegende Niveauflächen $U = c$ und $U = c'$, wobei c' ein wenig kleiner als c sein möge. Dann wirkt die Kraft $\mathfrak{F}$ an allen Punkten P der Fläche c in der Richtung von c zu c' und die Größe der Kraft ist nach (122):

$$F = \frac{c - c'}{\Delta},$$

wenn $\Delta = dn$ den räumlichen Abstand (positiv) der beiden Flächen bedeutet; d. h. die Größe der Kraft ist umgekehrt proportional dem Abstand der beiden Flächen. Je enger die Flächen nebeneinander verlaufen, um so größer wird die Kraft.

So treten die Niveauflächen in enge Analogie mit den auf meteorologischen Karten durch Kurven dargestellten Isothermen bzw. Isobaren, indem dort statt des Potentials die Temperatur bzw. der Druck es ist, dessen negativer Gradient die Größe und Richtung des Wärmeleitungsstromes bzw. der Druckkraft liefert.

Die Kurven, welche das System der Niveauflächen $c, c', c'' \cdots$ senkrecht durchschneiden (in Fig. 9 punktiert gezeichnet), und zwar in der Richtung abnehmenden Potentials, heißen die „Kraftlinien" des Feldes, da sie in jedem ihrer Punkte die Richtung der dort wirkenden Kraft angeben. So z. B. sind bei einer nach dem Gravitationsgesetz wirkenden homogenen Kugel die Niveauflächen die konzentrischen Kugelflächen, die Kraftlinien die von außen nach dem Mittelpunkt verlaufenden Geraden. Besitzt die Kugel innen einen konzentrisch kugelförmigen Hohlraum, so stellt dieser ganze

Raum eine einzige ausgeartete Niveaufläche vor, in welcher der Verlauf der Kraftlinien unbestimmt wird.

Im allgemeinen sind die Gleichungen einer Kraftlinie nach (110):

$$dx : dy : dz = \frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} : \frac{\partial U}{\partial z} \,. \tag{123}$$

Eine Kraftlinie kann nicht in sich zurücklaufen, sondern muß entweder ins Unendliche gehen oder an einer singulären Stelle endigen. Denn da sie stets in der Richtung abnehmenden Potentials verläuft, und da das Potential nach seiner Definition (108) in jedem Raumpunkt einen einzigen bestimmten Wert besitzt, bis auf eine belanglose additive Konstante, so ist es ausgeschlossen, daß eine Kraftlinie zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrt.

§ 41. Betrachten wir schließlich noch den speziellen Fall, daß der Aufpunkt P sich im Gleichgewicht befindet, z. B. in der Mitte zwischen zwei gleichen anziehenden Massenpunkten, dann ist nach (110):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \,, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \,, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \,, \tag{124}$$

d. h. die Richtung der durch P gehenden Kraftlinie ist unbestimmt. Ein solcher Gleichgewichtspunkt, den wir P_0 nennen wollen, ist also in dem System der Niveauflächen und Kraftlinien ein singulärer Punkt. Dies ist nach (124) z. B. der Fall, wenn in P_0 die Funktion U ein absolutes Maximum oder Minimum besitzt. Dann ist leicht zu sehen, daß in dem ersteren Fall das Gleichgewicht absolut labil, im zweiten Fall das Gleichgewicht absolut stabil ist. Denn verschiebt man den Aufpunkt P ein wenig aus seiner Gleichgewichtslage P_0, so gelten die Gleichungen (124) nicht mehr, und der Punkt wird durch die auf ihn wirkende Kraft in Bewegung gesetzt werden, und zwar in einer Richtung abnehmenden Potentials.

Ist nun in P_0 das Potential U ein Maximum, so kann demnach der bewegliche Punkt unmöglich in die Gleichgewichtslage zurückkehren, d. h. das Gleichgewicht ist labil. Umgekehrt verhält es sich, wenn in P_0 das Potential U ein Minimum ist.

Doch können die Gleichungen (124) auch gelten, ohne daß U ein Maximum oder ein Minimum ist; dann hängt die Antwort auf die Frage, ob der aus der Gleichgewichtslage verschobene Punkt in dieselbe zurückkehrt, davon ab, in welcher Richtung die Verschiebung stattgefunden hat, und das Gleichgewicht wird als bedingt stabil oder bedingt labil bezeichnet.

Ist endlich U innerhalb eines endlichen Raumes konstant, wie in dem § 38 betrachteten inneren Raum einer Hohlkugel, so gelten die Gleichungen (124) in diesem ganzen Raume. Dann wird das Gleichgewicht durch eine Verschiebung des Aufpunktes überhaupt nicht gestört und heißt daher indifferent.

§ 42. Während die vorstehenden Sätze, von § 39 an, für jedes beliebige Anziehungsgesetz gelten, wollen wir uns nun wieder speziell mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz beschäftigen. In dem Ausdruck des Newtonschen Potentials U, welcher durch (111) oder durch (112) dargestellt wird, je nachdem es sich um punktförmig oder um räumlich angeordnete Massen handelt, ist der wesentliche, charakteristische Bestandteil die mit $-fm$ multiplizierte Funktion, welche daher oft auch als „Potentialfunktion" φ im Gegensatz zum Potential U, bezeichnet wird. Ihr Ausdruck ist in den beiden angegebenen Fällen:

$$\varphi = \sum \frac{m_1}{r_1}, \tag{125}$$

und:

$$\varphi = \int \frac{k\,dV}{r}. \tag{126}$$

Der wichtigste Unterschied dieser beiden Ausdrücke der Potentialfunktion ist der, daß, wenn der Aufpunkt x, y, z in eine der wirkenden Massen ξ, η, ζ hineinrückt, der erste Ausdruck samt allen Differentialquotienten unendlich groß wird, während der zweite Ausdruck, wie wir in § 38 gesehen haben, im Innern der wirkenden Massen endlich ist und auch beim Hineinrücken durch die Oberfläche stetig bleibt.

Fragen wir nun auch nach den Differentialquotienten der Potentialfunktion φ in (126) nach x, y, z. Die ersten Differentialquotienten geben die Komponenten der Anziehungskraft, sie sind also nach § 33 durchweg endlich und stetig. Ihre Werte ergeben sich aus (126) durch Differentiation, wenn man bedenkt, daß k nur von ξ, η, ζ, nicht aber von x, y, z abhängt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int \frac{(\xi - x)\,k\,dV}{r^3} \text{ usw.}, \tag{127}$$

übereinstimmend mit (90).

Daß die Größe $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ auch für einen inneren Punkt endlich ist, trotz des r^3 im Nenner, erkennt man auch direkt, wenn man dV durch Polarkoordinaten ausdrückt, mit dem Aufpunkt x, y, z als

Anfangspunkt. Denn dann geht in dem Ausdruck (93) von dV der Faktor ϱ^2 in r^2 über, und es bleibt in (127) neben lauter endlichen Größen der Faktor $\frac{\xi - x}{r}$ stehen, welcher kleiner als 1 ist.

§ 43. Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn wir zu den zweiten Differentialquotienten von φ nach x, y, z übergehen. Denn wenn wir (127) wiederum nach x differentieren:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\int \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}\right) k\,dV, \tag{128}$$

so hat dieser Ausdruck nur dann einen bestimmten Sinn, wenn r durchweg von Null verschieden ist, d. h. wenn der Aufpunkt außerhalb aller wirkenden Massen liegt. Fällt nämlich x, y, z mit einem der ξ, η, ζ zusammen, so wird $r = 0$, und die Einführung von Polarkoordinaten, wie am Schluß des vorigen Paragraphen, lehrt, daß jedes Glied der Differenz in (128) logarithmisch unendlich wird, wodurch der Wert der Differenz die unbestimmte Form $\infty - \infty$ annimmt.

Wir beschränken uns daher zunächst auf die Betrachtung des Falles, daß der Aufpunkt x, y, z außerhalb liegt. Dann erhält man durch analoge Bildung von $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ und Addition dieser drei Integrale, mit Rücksicht auf (85) die wichtige, für die Newtonsche Potentialfunktion charakteristische Beziehung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \equiv \Delta \varphi = 0, \tag{129}$$

welche die Laplacesche Gleichung genannt wird.

§ 44. Fragen wir nun nach dem Werte von $\Delta \varphi$ für einen Aufpunkt im Innern der wirkenden Massen. Für diesen Fall ist die Gleichung (128) unbrauchbar; gleichwohl besitzt $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, ebenso wie φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, auch im Innern der Massen einen bestimmten endlichen Wert.

Nehmen wir z. B. den einfachen Fall einer homogenen Kugel mit dem Radius R und dem Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt, so ist für einen Punkt x, y, z im Innern derselben nach (119):

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} k (3R^2 - x^2 - y^2 - z^2), \tag{130}$$

wie sich aus dem dortigen Ausdruck des Potentials U ergibt, wenn man den Faktor $-fm$ fortläßt und bedenkt, daß r_0 die Entfernung des Aufpunktes vom Kugelmittelpunkt darstellt. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{3} k = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

und:

$$\Delta \varphi = -4\pi k, \tag{131}$$

unabhängig vom Radius der Kugel, welche Gleichung als die Poissonsche bezeichnet wird.

Wir können die Poissonsche Gleichung leicht auf den Fall einer beliebig geformten inhomogenen Masse verallgemeinern. Zu diesem Zweck denken wir uns um den im Innern der Masse befindlichen Aufpunkt eine sehr kleine Kugel gelegt, deren Masse wir mit 1 bezeichnen, im Gegensatz zu der übrigen Masse 2. Dann ist die Potentialfunktion φ der ganzen Masse gleich der Summe der von der Masse 1 und der von der Masse 2 herrührenden Potentialfunktionen:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \text{und ebenso:} \quad \Delta \varphi = \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2.$$

Nun ist aber nach (129) $\Delta \varphi_2 = 0$, weil in bezug auf die Masse 2 der Aufpunkt ein äußerer Punkt ist, also bleibt $\Delta \varphi = \Delta \varphi_1$. Da die Kugel sehr klein ist, kann man sie ohne merklichen Fehler als homogen betrachten, und zwar von derjenigen Dichtigkeit, welche die wirkende Masse gerade an der Stelle besitzt, wo sich der Aufpunkt befindet. Man erhält dieselbe, wenn man in $k_{\xi,\eta,\zeta}$ für ξ, η, ζ die Werte x, y, z einsetzt. Daraus folgt also nach (131):

$$\Delta \varphi = -4\pi k_{x,y,z}. \tag{132}$$

Man kann die Poissonsche Gleichung insofern als eine Verallgemeinerung der Laplaceschen Gleichung auffassen, als man sich die wirkenden Massen den ganzen unendlichen Raum lückenlos ausfüllend denkt mit einer Dichtigkeit k, die teils Null, teils von Null verschieden ist. Dann ist der Aufpunkt stets innerhalb der Massen gelegen, und es gilt immer die Gleichung (132). Wo keine reale Masse sich befindet, ist $k = 0$, und es tritt an die Stelle der Poissonschen die Laplacesche Gleichung. Zugleich erkennt man an der Hand dieser Auffassung, daß der Sprung, den die zweiten Differentialquotienten von φ beim Durchgang des Aufpunktes durch die Oberfläche der Massen erleiden, bedingt ist durch den Sprung, welchen die Dichtigkeit k bei diesem Durchgang erleidet.

§ 45. Vom mathematischen Standpunkt aus sehen wir, daß, wenn die Potentialfunktion φ von irgendwelchen räumlich verteilten Massen in allen Punkten x, y, z des Raumes gegeben ist, die Dichtigkeit k dieser Massen durch eine einfache eindeutige Differentialoperation daraus berechnet werden kann, während die umgekehrte Aufgabe, aus der Dichtigkeit k die Potentialfunktion φ zu finden, eine solche der Integralrechnung ist. Oder mit anderen Worten, der Ausdruck (126):

$$\varphi = \int \frac{k_{\xi,\eta,\zeta} \cdot dV}{r},$$

in welchem wir k für unendlich ferne Punkte ξ, η, ζ als verschwindend annehmen, ist ein Integral der Differentialgleichung (132), aber nicht das allgemeine Integral, sondern dasjenige partikuläre Integral, welches durch die Bedingung beschränkt ist, daß φ verschwindet, wenn der Aufpunkt ins Unendliche rückt.

Der allgemeine Ausdruck einer eindeutigen und mit den ersten Differentialquotienten stetigen Funktion φ, welche der Differentialgleichung (132) genügt, ist:

$$\varphi = \int \frac{k\,dV}{r} + \varphi_0, \tag{133}$$

wobei φ_0 der Gleichung $\Delta\varphi_0 = 0$ im ganzen unendlichen Raume genügt. φ_0 läßt sich immer auffassen als die Potentialfunktion von Massen, die ganz im Unendlichen liegen. So z. B. ist der spezielle Wert:

$$\varphi_0 = \text{const.},$$

welcher offenbar ebenfalls die Gleichung $\Delta\varphi_0 = 0$ befriedigt, gleich der Potentialfunktion einer homogenen Kugelschicht von unendlich großem Radius. Vgl. § 37.

§ 46. Wir wollen noch die Potentialfunktion φ berechnen für den speziellen Fall, daß die Dichtigkeit der wirkenden Massen von einer der drei Koordinaten, etwa von ζ, unabhängig ist. Dieser Fall wird verwirklicht, wenn die Massen zylindrisch parallel der z-Achse angeordnet sind, in der Weise, daß in jedem unendlich dünnen Zylinder die Dichtigkeit konstant ist.

Dann wird die Potentialfunktion φ nur von x und y, nicht aber von z abhängen, und wir können daher unbeschadet der Allgemeinheit den Aufpunkt in der xy-Ebene befindlich annehmen: $z = 0$, wodurch r^2 übergeht in:

$$r^2 = \zeta^2 + \varrho^2,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2. \tag{134}$$

ϱ ist die Entfernung des Aufpunktes von derjenigen zur z-Achse Parallelen, welche durch den Punkt ξ, η hindurchgeht. Setzen wir noch für dV seinen Wert (88), und zur Abkürzung den Querschnitt eines der unendlich dünnen Zylinder:

$$d\xi\, d\eta = d\sigma, \tag{135}$$

so ergibt sich für die gesuchte Potentialfunktion nach (126):

$$\varphi = \int\int \frac{k_{\xi,\eta}\, d\sigma \cdot d\zeta}{\sqrt{\zeta^2+\varrho^2}}. \tag{136}$$

Wir führen zuerst die Integration über ζ aus. Dann folgt:

$$\varphi = \int k\, d\sigma \cdot \Big[\log(\zeta + \sqrt{\zeta^2+\varrho^2})\Big]_{-l}^{+l}.$$

Hier bedeutet l die halbe Länge eines der unendlich dünnen Zylinder, welche so groß anzunehmen ist, daß eine weitere Vergrößerung keine physikalische Bedeutung mehr besitzt. Bedenkt man nun, daß für ein hinreichend großes l:

$$\log \frac{l+\sqrt{l^2+\varrho^2}}{-l+\sqrt{l^2+\varrho^2}} = \log \frac{4l^2}{\varrho^2} = 2 \log \frac{2l}{\varrho},$$

so kommt:

$$\varphi = \int k\, d\sigma \cdot 2 \log \frac{2l}{\varrho} = \text{const} - 2\int k \log \varrho \cdot d\sigma.$$

Der Zahlenwert der const. hat, obwohl unendlich groß, keinerlei physikalische Bedeutung (§ 36). Wir schreiben daher die Potentialfunktion:

$$\varphi = -2 \int k_{\xi,\eta} \log \varrho \cdot d\sigma, \tag{137}$$

und bemerken, daß in diesem Ausdruck alles auf die z-Richtung Bezügliche verschwunden ist, daß sich also seine Bedeutung ausschließlich auf die Ebene erstreckt. Man kann daher φ auch deuten als die Potentialfunktion von gewissen fingierten Massen, welche auf der xy-Ebene ausgebreitet sind mit einer Flächendichtigkeit $2k = \varkappa$ im Flächenelement $d\sigma$, auf einen in derselben Ebene befindlichen Aufpunkt, dessen Entfernung von $d\sigma$ durch ϱ gegeben wird. Nur ist das Kraftgesetz nicht mehr das Newtonsche.

Denn für die Kraftkomponenten hat man, abgesehen von einem belanglosen Faktor:

$$(138)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -\displaystyle\int \frac{\varkappa}{\varrho}\,\frac{x-\xi}{\varrho}\cdot d\sigma, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\displaystyle\int \frac{\varkappa}{\varrho}\,\frac{y-\eta}{\varrho}\cdot d\sigma, \end{cases}$$

woraus hervorgeht [vgl. (90)], daß die Anziehungskraft umgekehrt proportional der Entfernung ϱ ist.

Was das Newtonsche Potential für den Raum, das ist das logarithmische Potential:

$$(139)\qquad \varphi = -\int \varkappa_{\xi,\eta} \log \varrho \cdot d\sigma,$$

für die Ebene. Insbesondere gilt dafür die Poissonsche Gleichung (132):

$$(140)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2\pi \varkappa_{x,y},$$

welche für einen Punkt außerhalb der Massen übergeht in:

$$(141)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

wie man sich auch direkt durch Differentiation von (138) nach x und y überzeugen kann.

Für das logarithmische Potential gelten auch noch folgende Sätze, die sich aus den Gleichungen (138) ebenso ableiten lassen wie die für die Anziehung einer homogenen Kugelschicht nach dem Newtonschen Kraftgesetz aus den Gleichungen (90).

Die Anziehung einer gleichförmig mit Masse belegten ringförmigen, von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten Fläche auf einen Punkt im Äußern ist ebenso groß, als ob die ganze Masse im Mittelpunkt der Kreise vereinigt wäre; die auf einen Punkt im Innern des kleineren Kreises dagegen ist gleich Null. Daraus ergibt sich dann auch auf demselben Wege wie § 38 der Ausdruck für die Potentialfunktion dieses homogenen Kreisringes, wenn R_1 und R_2 die Radien der inneren und äußeren Begrenzung, ϱ_0 die Entfernung des Aufpunktes vom Mittelpunkt bedeutet:

Für $\varrho_0 > R_2$:

$$(142)\qquad \varphi = -\pi\varkappa(R_2^2 - R_1^2)\log \varrho_0.$$

Für $R_2 > \varrho_0 > R_1$:

$$(143)\qquad \varphi = \frac{\varkappa\pi}{2}(R_2^2 - \varrho_0^2) - \pi\varkappa R_2^2 \log R_2 + \pi\varkappa R_1^2 \log \varrho_0.$$

Für $\varrho_0 < R_1$:

$$\varphi = \frac{\pi\varkappa}{2}(R_2^2 - R_1^2) - \pi\varkappa R_2^2 \log R_2 + \pi\varkappa R_1^2 \log R_1 . \quad (144)$$

Man überzeugt sich leicht, daß φ mitsamt dem ersten Differentialquotienten nach ϱ_0 überall stetig ist, während für $\Delta\varphi$ die Gleichungen (140) und (141) gelten.

Für einen Vollkreis mit dem Radius R wird $R_1 = 0$, $R_2 = R$ und die Potentialfunktion auf einen Punkt in der Entfernung $\varrho_0 < R$ vom Mittelpunkt wird nach (143):

$$\varphi = \frac{\pi\varkappa}{2}(R^2 - \varrho_0^2) - \pi\varkappa R^2 \log R , \quad (145)$$

während für einen äußeren Punkt ($\varrho_0 > R$) die Potentialfunktion nach (142) den Wert besitzt:

$$\varphi = -\mu \log \varrho_0 , \quad (146)$$

wenn $\mu = \pi\varkappa R^2$ die gesamte anziehende Masse bezeichnet.

Viertes Kapitel. Integration der Bewegungsgleichungen.

§ 47. Die Aufgabe, die Bewegung eines, gegebenen Kräften unterworfenen, materiellen Punktes zu bestimmen, erfordert die Integration der Bewegungsgleichungen (55), und diese läßt sich nur dann direkt ausführen, wenn die Kräftekomponenten entweder konstant oder als Funktionen der Zeit t gegeben sind. Meistens werden die Kräftekomponenten aber von der Lage des Punktes oder von seiner Geschwindigkeit abhängen, und dann erfordert die Durchführung der Integration eine besondere Behandlung der Bewegungsgleichungen. Derartige Behandlungsmethoden, die in manchen Fällen eine Integration gestatten, sollen im folgenden dargelegt werden.

Multipliziert man die Gleichungen (55) nacheinander mit u, v, w, und addiert, so erhält man:

$$m(u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w}) = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} ,$$

oder, mit dt multipliziert, nach (41):

$$d\left(\frac{1}{2}mq^2\right) = X dx + Y dy + Z dz . \quad (147)$$

Die Größe $\frac{1}{2}mq^2$ wird nach Leibniz, obwohl etwas unzweckmäßig, die „lebendige Kraft“ des Aufpunktes genannt, während der Differentialausdruck auf der rechten Seite als die „Arbeit“ A

bezeichnet wird, welche die Kraft $\mathfrak{F}$ an dem Aufpunkt leistet, wenn er aus der Lage x, y, z in die Lage $x + dx,\ y + dy,\ z + dz$ übergeht. Mit Benutzung der Beziehungen (60) und (45) läßt sich die Arbeit auch schreiben:

$$\begin{aligned} A &= F \cdot ds \cdot (\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu) \\ &= F \cdot ds \cdot \cos(F, ds), \end{aligned} \tag{148}$$

d. h. die Arbeit ist gleich dem Produkt der Größe der Kraft, der Größe der Verschiebung und des cos des Winkels dieser beiden. Ist der Winkel stumpf, so ist die Arbeit negativ, ist der Winkel ein rechter, so ist die Arbeit Null.

In der Vektorrechnung heißt die Größe (148) das Produkt der beiden Vektoren $\mathfrak{F}$ und $d\mathfrak{r}$:

$$A = \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r}, \tag{149}$$

und zwar das „skalare Produkt", weil die Arbeit zu den skalaren Größen gehört (§ 36). Die Einheit der Arbeit im absoluten g. c. s.-System, d. h. die Arbeit einer Kraft von 1 Dyn bei der Verschiebung des Aufpunktes um 1 cm in der Richtung der Kraft, heißt ein Erg.

Wirken mehrere Kräfte auf den Aufpunkt, so ist bei einer unendlich kleinen Verschiebung des letzteren die Arbeit der resultierenden Kraft, wie leicht aus (66) und (147) zu ersehen, gleich der Summe der Arbeiten der Einzelkräfte.

§ 48. Die Bedeutung der Gleichung (147), welche allgemein besagt, daß die Änderung der lebendigen Kraft des Aufpunktes gleich ist der von der wirkenden Kraft geleisteten Arbeit, beruht darauf, daß sie in zahlreichen wichtigen Fällen eine unmittelbare Integration gestattet. Im allgemeinen ist zwar eine Integration nicht möglich; denn auch wenn die Kräftekomponenten X, Y, Z als Funktionen von x, y, z bekannt sind, läßt sich nicht immer eine Funktion von x, y, z angeben, deren Differential gleich A ist; so z. B., wenn:

$$X = y^2, \quad Y = x^2, \quad Z = 0,$$
$$\text{also } A = y^2\,dx + x^2\,dy.$$

Dann heißt A ein „unvollständiges Differential". In einem solchen Falle muß die Integration der Bewegungsgleichungen auf anderem Wege erfolgen als durch Bildung von A.

Wenn aber speziell die wirkende Kraft eine Zentralkraft ist,

die von ruhenden Massenpunkten herrührt, so existiert nach (110) ein Potential U, und die Arbeit wird:

$$A = -dU, \tag{150}$$

d. h. die Arbeit der Kraft ist gleich der Abnahme von U. Durch Substitution in (147) und Integration erhält man dann:

$$\frac{1}{2} m q^2 - \frac{1}{2} m q_0^2 = U_0 - U, \tag{151}$$

wo q_0 und U_0 die Werte von q und U zur Zeit $t = 0$ bedeuten. Hiernach hängt die Geschwindigkeit q nur von dem Potential U ab. Wenn also der Punkt im Laufe seiner Bewegung eine bestimmte Niveaufläche $U =$ const. passiert, sei es an welcher Stelle, nach welcher Richtung, zu welcher Zeit immer, so besitzt er dabei eine bestimmte Geschwindigkeit. Aus (150) ergibt sich auch die physikalische Bedeutung des Potentials U. Es ist die Arbeit, welche die Zentralkraft im ganzen leistet, wenn der Aufpunkt von einer Stelle, wo das Potential U besteht, in irgendeiner Weise an eine Stelle rückt, wo das Potential Null ist. Die Gleichung (151) wird das „Prinzip der lebendigen Kraft" genannt.

Wir haben das Prinzip der lebendigen Kraft tatsächlich schon öfters angewendet, ohne es als solches zu kennzeichnen.

So ist für einen schweren Punkt von der Masse m:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg.$$

Daraus nach (110):

$$U = +mgz + \text{const.}, \tag{152}$$

und, wenn für $t = 0$ $z = 0$ ist, nach (151):

$$\frac{1}{2} m q^2 - \frac{1}{2} m q_0^2 = -mgz, \tag{152a}$$

genau übereinstimmend mit (80).

Ferner ist für das im § 12 behandelte Beispiel:

$$X = -cx,$$

daraus nach (110):

$$U = \frac{1}{2} c x^2 + \text{const.}, \tag{153}$$

und, da für $t = 0$ $x = 0$, nach (151):

$$\frac{1}{2} m u^2 - \frac{1}{2} m u_0^2 = -\frac{1}{2} c x^2,$$

genau übereinstimmend mit (17).

Wenn die Reibung mit ins Spiel kommt, wie in dem § 15 behandelten Fall, so ist das Prinzip der lebendigen Kraft nicht anwendbar, weil die Reibung keine Zentralkraft ist, und die Arbeit der Reibung daher kein vollständiges Differential darstellt.

§ 49. Das mechanische Prinzip der lebendigen Kraft besitzt nach dem, was wir gesehen haben, nur einen beschränkten Anwendungsbereich. Aber es läßt, sobald man über das Gebiet der Mechanik hinausgeht, eine allgemeinere Fassung zu, welche ein universelles, im ganzen Bereich der physikalischen und chemischen Vorgänge ausnahmslos gültiges Gesetz ausspricht: Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Die Grundlage dieses Prinzips bildet die aus jahrhundertlangen Erfahrungen abgeleitete Erkenntnis, daß es auf keinerlei Weise möglich ist, ein perpetuum mobile zu bauen, d. h. eine Vorrichtung zu konstruieren, durch welche fortwährend Wirkungen irgendwelcher Art erzeugt werden, ohne einen entsprechenden Aufwand von gewissen anderweitigen Wirkungen, oder mit andern Worten, daß es in der Natur eine gewisse Größe E gibt, die man als einen „Vorrat“ von Wirkungsfähigkeit auffassen kann, und welche die Eigentümlichkeit besitzt, daß sie, ebenso wie der in der Natur vorhandene Vorrat von Materie, wohl in den verschiedensten Formen auftreten und verschiedene Umwandlungen erleiden, aber niemals in ihrem Gesamtbetrage verändert werden kann, sondern vielmehr erhalten, konserviert wird: $E = \text{const.}$

Das Entscheidende bei der Formulierung des Energieprinzips ist die sachgemäße Definition von E, und um diesen Punkt, nicht um die Gültigkeit des Prinzips an sich, haben viele Meinungsverschiedenheiten und Kämpfe sich abgespielt.

Der einzige Weg zur richtigen Lösung der Frage ist der, daß man zunächst von speziellen Tatsachen ausgeht, und unter den Beziehungen, welche den Ausdruck der Tatsachen bilden, diejenige aussucht, welche sich als $E = \text{const.}$ deuten läßt. Wenn wir also im Bereich der hier betrachteten Mechanik eines materiellen Punktes nach einer derartigen Beziehung suchen, so ist vor allem zu bedenken, daß E außer den Koordinaten und den Geschwindigkeitskomponenten die Zeit t nicht explizite enthalten darf, weil E als Wirkungsvorrat nur von dem augenblicklichen physikalischen Zustand des Punktes, d. h. von seiner Lage und von seiner Geschwindigkeit, abhängen kann. Dann bleibt aber kein Zweifel

mehr übrig. Denn die einzige unter den von uns aufgefundenen Beziehungen, welche die Zeit t nicht enthält, ist die durch die Gleichungen (17), (80) und allgemeiner durch (151) ausgedrückte. Daraus folgt, daß die Gleichung (151) oder das Prinzip der lebendigen Kraft:

$$\frac{1}{2}mq^2 + U = \frac{1}{2}mq_0^2 + U_0 = \text{const.} \tag{154}$$

aufzufassen ist als die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie auf rein mechanische Vorgänge, und daß dabei die mechanische Energie zu setzen ist:

$$E = \frac{1}{2}mq^2 + U = L + U. \tag{155}$$

Die mechanische Energie besteht also aus zwei Teilen: der lebendigen Kraft L, oder der „kinetischen" Energie (Energie der Bewegung), und dem Potential U, oder der „potentiellen" Energie (Energie der Lage). Ihre Summe bleibt bei allen rein mechanischen Vorgängen konstant.

Da nach § 48 das Prinzip der lebendigen Kraft nur für solche Kräfte gilt, die ein Potential besitzen, so bleibt auch nur für diese Art von Kräften die mechanische Energie erhalten; daher werden solche Kräfte auch „konservative Kräfte" genannt. Für nichtkonservative Kräfte, wie z. B. Reibung, ändert sich die mechanische Energie, und die Universalität des Energieprinzips verlangt, daß in diesem Falle der Vorgang kein rein mechanischer ist, sondern die Erzeugung einer fremden Art von Energie in äquivalenter Menge mit sich bringt, z. B. Wärme. Dann verallgemeinert sich die Gleichung (154) etwa in folgender Weise:

$$(L - L_0) + (U - U_0) + W = 0, \tag{156}$$

wobei W die in dem Zeitraum von 0 bis t erzeugte Wärme bedeutet, in mechanischem Maße gemessen. So z. B. liefert die Gleichung (19a), mit $\frac{dx}{dt}$ multipliziert und nach t von 0 bis t integriert, die Beziehung:

$$(L - L_0) + (U - U_0) + \varrho \int_0^t \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = 0. \tag{157}$$

Das letzte Integral ist die erzeugte Wärme W.

Ein anderes Beispiel einer nichtkonservativen Kraft bietet der Fall, daß die Kraft irgendeine Funktion der Zeit t ist, wie z. B. wenn

wir den materiellen Punkt durch unsere Muskeln nach einem beliebigen rhythmischen Gesetz antreiben. Dann können wir natürlich die mechanische Energie des Punktes ganz nach Willkür verändern, aber das Energieprinzip verlangt, daß die Änderung der mechanischen Energie gerade kompensiert wird durch einen äquivalenten Betrag von Muskelenergie.

§ 50. Eine weitere Integrationsmethode der Bewegungsgleichungen (55) läßt sich immer dann zur Anwendung bringen, wenn die Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$, bei beliebiger Größe, stets durch ein festes Zentrum hindurchgeht. Dann liegt die Bahn des Aufpunktes in einer Ebene, die bestimmt ist durch das Zentrum und die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit des Aufpunktes. Wählen wir diese Ebene zur xy-Ebene und das Zentrum zum Koordinatenanfangspunkt, so ist $z=0$, $Z=0$ und

$$X:Y=x:y.$$

Dies in (55) substituiert, ergibt:

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right), \tag{157a}$$

und daraus durch Integration:

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c'. \tag{158}$$

Diese Gleichung gewinnt eine anschauliche Bedeutung durch die Einführung ebener Polarkoordinaten r und φ mittelst der Beziehungen:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi. \tag{159}$$

Dann ist nämlich:

$$\left\{\begin{aligned} dx&=dr\cos\varphi-r\sin\varphi\,d\varphi\\ dy&=dr\sin\varphi+r\cos\varphi\,d\varphi\end{aligned}\right. \tag{160}$$

und die Gleichung (158) geht über in:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=c'. \tag{161}$$

Integriert:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 d\varphi=c't. \tag{162}$$

Nun ist $r^2d\varphi$ bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ord-

nung die doppelte Fläche des unendlich schmalen Dreiecks AOB (Fig. 10), welches gebildet wird von den Radiivektoren OA und OB zu den Zeiten t und $t+dt$, und dem Bahnelement AB. Also ist nach Gleichung (162) die Fläche, welche eingeschlossen wird von den Radiivektoren zu den Zeiten 0 und t und der Bahn des Aufpunktes, proportional der Zeit t, oder mit andern Worten: der Radiusvektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Daher wird die Gleichung (161) oder (158) auch als das Prinzip der Flächen bezeichnet.

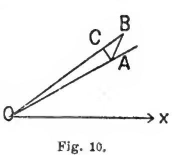


Fig. 10.

§ 51. Eine erweiterte Anwendung findet das Prinzip der Flächen in dem Falle, daß die Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ zwar nicht durch ein festes Zentrum, wohl aber durch eine im Raume feste Gerade hindurchgeht. Nimmt man nämlich diese Gerade zur z-Achse, so ist zwar nicht $z=0$ und $Z=0$, wohl aber: $X:Y=x:y$, und es folgen daraus, ebenso wie im § 50, die Gleichungen (161) und (162). Daher gilt in diesem Falle das Prinzip der Flächen zwar nicht für die Bewegung des Aufpunktes selber, wohl aber für die Bewegung seiner Projektion auf die xy-Ebene, d. h. für die Bewegung des Punktes, dessen Koordinaten x, y und 0 sind.

§ 52. Wir wollen nun die abgeleiteten Sätze auf einen speziellen, in der Natur besonders wichtigen Fall anwenden, und wählen dazu die Bewegung eines materiellen Punktes m, der von einem festen Zentrum μ mit der Newtonschen Gravitationskraft angezogen wird, wie ein Planet von der Sonne.

Dann ist die Bewegung, wie man ohne weiteres sieht, eine ebene, und erfordert daher zu ihrer Bestimmung nur 2 Gleichungen, als welche wir das Prinzip der lebendigen Kraft und das Prinzip der Flächen benutzen wollen, indem wir die Ebene der Bewegung zur xy-Ebene machen.

Das Prinzip der lebendigen Kraft lautet nach (154), wenn wir den Wert des Gravitationspotentials für ein einziges Zentrum aus (111) einsetzen und noch durch $\frac{m}{2}$ dividieren:

$$q^2 - \frac{2f\mu}{r} = c. \tag{163}$$

Das Prinzip der Flächen ist durch (161) gegeben. Die Werte der Konstanten c und c' sind durch den Anfangszustand bestimmt,

und zwar ist, wenn wir die Werte für $t=0$ durch den angehängten Index 0 kennzeichnen:

$$c = q_0^2 - \frac{2f\mu}{r_0}. \tag{164}$$

Die Konstante c' hängt auch noch von der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit ab. Wir bezeichnen dieselbe zweckmäßigerweise nicht durch den Winkel mit der x-Achse, weil derselbe gar keine physikalische Bedeutung hat, sondern durch den Winkel mit dem Radiusvektor: α_0, und erzielen dabei zugleich den Vorteil, daß die Wahl der x-Achse noch vollständig offen bleibt. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 10):

$$AB = ds, \quad AC = r\,d\varphi, \quad \sphericalangle B = \alpha.$$

Folglich:

$$r\,d\varphi = ds \cdot \sin\alpha,$$

und, durch dt dividiert:

$$r\frac{d\varphi}{dt} = q \sin\alpha.$$

Also für den Anfangszustand, nach (161):

$$c' = r_0 q_0 \sin\alpha_0. \tag{165}$$

§ 53. Die Bewegungsgleichungen (161) und (163) liefern durch Elimination der Zeit t die Bahn des Planeten. Natürlich empfiehlt es sich im vorliegenden Falle, Polarkoordinaten zu benutzen.

Dann ist nach (160):

$$q^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \tag{166}$$

und, nach (163):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{2f\mu}{r} = c, \tag{167}$$

und die Elimination von dt aus (161) und (167) liefert als Differentialgleichung der Bahnkurve:

$$d\varphi = \frac{c'\,dr}{r\sqrt{cr^2 + 2f\mu r - c'^2}}. \tag{168}$$

Integriert:

$$\varphi = \arccos\frac{c'^2 - f\mu r}{r\sqrt{f^2\mu^2 + cc'^2}} + c''. \tag{168a}$$

Die Integrationskonstante c'' ist bestimmt durch den Wert φ_0, welchen φ für $r = r_0$ annimmt. Da wir nun die Richtung der x-Achse noch nicht festgelegt haben, so können wir unbeschadet

der Allgemeinheit $c''=0$ setzen, indem wir damit nur über die Richtung der x-Achse verfügen.

Dann erhalten wir:

$$\cos\varphi = \frac{c'^2 - f\mu r}{r\sqrt{f^2\mu^2 + cc'^2}}. \tag{169}$$

Löst man diese Gleichung nach r auf, und setzt zugleich zur Abkürzung:

$$\sqrt{1 + \frac{cc'^2}{f^2\mu^2}} = \varepsilon, \tag{170}$$

$$\frac{c'^2}{f\mu} = p, \tag{171}$$

so ergibt sich:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}. \tag{172}$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes (Fig. 11) mit einem Brennpunkt als Koordinatenanfangspunkt, der großen Achse als

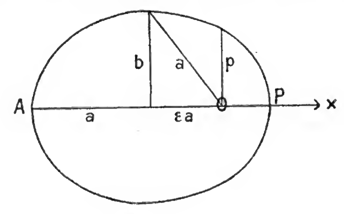


Fig. 11.

x-Achse, dem Parameter p (Ordinate im Brennpunkt), und der numerischen Exzentrizität:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \tag{173}$$

Die Größen der Halbachsen sind:

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \quad \text{und} \quad b^2 = pa. \tag{174}$$

Alle diese Konstanten ergeben sich aus den Bedingungen des Anfangszustandes r_0, q_0 und α_0 nach (170) und (171) mit Berücksichtigung der Werte von c und c' in (164) und (165) folgendermaßen:

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{r_0 q_0^2}{f\mu} - 1\right)^2 \sin^2\alpha_0 + \cos^2\alpha_0\,, \quad p = \frac{r_0^2 q_0^2 \sin^2\alpha_0}{f\mu}, \tag{175}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{q_0^2}{f\mu}, \quad b^2 = \frac{r_0^2 \sin^2\alpha_0}{\frac{2f\mu}{r_0 q_0^2} - 1}. \tag{176}$$

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Exzentrizität ε kleiner, gleich oder größer als 1 ist, oder, nach (170), je nachdem c negativ, Null oder positiv ist. In der Tat bedeutet ja $\sqrt{c}$ nach (163) die Geschwindigkeit in unendlicher Entfernung, welche für eine elliptische Bahn imaginär wird. Für den Anfangszustand folgt daraus nach (164) als Bedingung der speziellen Gattung des Kegelschnittes:

$$q_0^2 \lesseqgtr \frac{2f\mu}{r_0}. \tag{177}$$

Es ist bemerkenswert, daß die Gattung des Kegelschnittes ebenso wie die Länge der großen Halbachse a, gar nicht von der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit abhängt, sondern nur von dem Vorzeichen der Energiekonstanten c.

Die elliptische Form der Planetenbahnen mit der Sonne als Brennpunkt bildet den Inhalt des ersten der drei empirisch gefundenen Gesetze von Kepler, das zweite Gesetz spricht das Prinzip der Flächen aus, das dritte folgt im nächsten Paragraphen.

Für die Erdbahn ist die Exzentrizität ε ungefähr gleich $\frac{1}{60}$, der Parameter p ungefähr gleich $148 \cdot 10^6$ km, die Geschwindigkeit q im Mittel etwa $30 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$, die Winkelgeschwindigkeit also etwa:

$$\frac{q}{p} = 2 \cdot 10^{-7}. \tag{178}$$

Die Bedingung, daß die Bahn eine kreisförmige ist, lautet: $\varepsilon = 0$, also für den Anfangszustand nach (175), da ε^2 die Summe zweier Quadrate ist:

$$\cos \alpha_0 = 0 \quad \text{und} \quad q_0^2 = \frac{f\mu}{r_0},$$

d. h. die Geschwindigkeit muß erstens senkrecht stehen auf dem Radiusvektor und zweitens gerade diejenige Größe besitzen, welche zu der für die gleichförmige Kreisbewegung gültigen Beziehung (62) führt. Letzteres erhellt sogleich, wenn man bedenkt, daß hier die Kraft $F = f\frac{m\mu}{r^2}$ ist.

§ 54. Für die Abhängigkeit der Koordinaten r und φ von der Zeit t gelten verwickeltere Beziehungen, deren Verwertung für die Aufgaben der Astronomie nur mittelst Reihenentwicklungen möglich ist. Wir wollen hier nur noch, unter der Voraussetzung

einer elliptischen Bahn, die Zeit eines Umlaufs, die sogenannte Revolutionszeit T, berechnen. Dies geschieht am einfachsten durch Benutzung der Gleichung (162) des Prinzips der Flächen und Ausführung der Integration von $t=0$ bis $t=T$, also von $\varphi=\varphi_0$ bis $\varphi=\varphi_0+2\pi$. Dann ergibt sich auf der linken Seite die doppelte Fläche der Ellipse, also:

$$2ab\pi=c'T.$$

Eliminiert man hier c' mittelst (171) und b mittelst (174), so folgt:

$$T^2=\frac{4\pi^2a^3}{f\mu}, \tag{179}$$

d. h. bei bestimmtem μ (Sonne) ist das Quadrat der Revolutionszeit proportional dem Kubus der großen Achse. (Drittes Gesetz von Kepler.)

So stellen sich die drei, ihrer ursprünglichen Form nach in keinem inneren Zusammenhang erscheinenden Keplerschen Gesetze als gemeinsame Folgerungen des einen Newtonschen Gravitationsgesetzes dar. Aber die Bedeutung des letzteren Gesetzes besteht nicht allein darin, daß es die Keplerschen Gesetze abzuleiten gestattet. Es umfaßt vor allem auch die Gesetze der irdischen Schwere. Denn wir können die Gleichung (179) auch auf die Erde als Anziehungszentrum mit der Masse μ anwenden, indem wir für T die Umlaufszeit des Mondes und für a den Radius der Mondbahn einsetzen. Der daraus folgende Wert von $f\mu$ ist aber nach (103) gleich R^2g, wenn R den Radius der Erde, g die Beschleunigung der Schwere an der Erdoberfläche bedeutet; also ist:

$$g=\frac{4\pi^2a^3}{R^2T^2}. \tag{180}$$

Setzt man hierin die Werte:

$$a=60{,}1\cdot R,$$
$$R=637\cdot 10^6\,\text{cm},$$
$$T=1\,\text{Monat}=236\cdot 10^4\,\text{sec.},$$

so ergibt sich $g=981$, in genügender Übereinstimmung mit den irdischen Messungen (§ 10). Diese Berechnung gab Newton die feste Grundlage für seine Theorie der allgemeinen Gravitation.

Doch das Newtonsche Gravitationsgesetz leistet noch viel mehr, als daß es die irdische Schwere und die Keplerschen Gesetze in einen einzigen Ausdruck zusammenfaßt. Denn wie sich nachträglich herausgestellt hat, ergibt es auch die durch die gegen-

seitige Gravitation der Planeten bedingten Störungen (Perturbationen), sowie eine Anzahl anderer Himmelserscheinungen in voller Übereinstimmung mit den Beobachtungen (Bewegungen der Kometen, Doppelsterne usw.); es ist also nicht nur einfacher, sondern auch genauer als die Keplerschen Gesetze. Da nun die Möglichkeit einer derartig leistungsfähigen Hypothese gewiß nicht dem reinen Zufall zugeschrieben werden wird, so erscheint die Schlußfolgerung berechtigt, daß die Aufstellung des Newtonschen Gravitationsgesetzes im Grunde nicht als eine zweckmäßige Erfindung, wie einige Naturphilosophen wollen, sondern als eine erkenntnismäßige Entdeckung zu bewerten ist.

Fünftes Kapitel. Relative Bewegung.

§ 55. Wir haben bei der Ableitung der Planetenbewegung im vorigen Kapitel das anziehende Zentrum, die Sonne, als ruhend angenommen. Das ist jedoch sicherlich schon deshalb unzutreffend, weil die Sonne frei beweglich ist und von jedem Planeten nach dem Gravitationsgesetz angezogen wird. Genau genommen muß also auch dieser Bewegung der Sonne Rechnung getragen werden.

Außerdem ist aber noch ein anderer Umstand zu bedenken. Was wir beobachten und messen, und was wir daher allein einer jeden Prüfung der Theorie zugrunde legen können, ist gar nicht die absolute Bewegung der Sonne und der Planeten, sondern diejenige Bewegung, wie sie uns Bewohnern der Erde erscheint. Denn wir verfügen nicht über ein ruhendes Koordinatensystem, sondern das Koordinatensystem, auf das wir die Bewegungen aller Körper, auch der Himmelskörper, beziehen, bewegt sich mit der Erde um die Sonne und dreht sich sogar im Laufe des Tages nach verschiedenen Richtungen.

Wir wollen daher jetzt die Aufgabe gleich von der allgemeinsten Seite angreifen und wollen fragen nach den Gesetzen der Bewegung eines materiellen Punktes, wie sie einem in bestimmter Weise bewegten Beobachter erscheinen.

Zu diesem Zwecke denken wir uns außer dem bisher benutzten ruhenden Koordinatensystem x, y, z (die Frage nach einer Realisierung desselben können wir ganz außer Betracht lassen) ein anderes rechtwinkliges und rechtshändiges Koordinatensystem x', y', z', welches sich in bestimmter gegebener Weise bewegt, und in dem Anfangspunkt O' dieses Koordinatensystems, mit demselben fest ver-

bunden, denken wir uns einen Beobachter B' aufgestellt, etwa so, daß ihm die z'-Achse nach oben, die x'-Achse nach rechts, und infolgedessen die y'-Achse nach vorn geht.

Es handelt sich nun um die Frage: Welche Gleichungen der Mechanik gelten für den Beobachter B' anstatt der Gleichungen (55) bzw. (57)?

Die Antwort auf diese Frage gewinnen wir dadurch, daß wir einerseits die Komponenten der Beschleunigung $\ddot{\mathfrak{r}}$, andererseits die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}$ durch die Komponenten der entsprechenden auf den bewegten Beobachter B' bezüglichen Größen $\ddot{\mathfrak{r}}'$ und $\mathfrak{F}'$ ausdrücken und diese Werte in (55) einsetzen.

§ 56. Die Aufgabe, $\ddot{\mathfrak{r}}'$ durch $\ddot{\mathfrak{r}}$ auszudrücken, oder umgekehrt, ist eine rein kinematische. Da die Bewegung des gestrichenen Koordinatensystems als bekannt vorausgesetzt wird, so sind die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Anfangspunktes O' sowie die Richtungscos der drei Achsen x', y', z' bekannte Funktionen der Zeit t. Wir nennen sie α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3, indem wir die Buchstaben α, β, γ den ungestrichenen Achsen x, y, z, die Ziffern 1, 2, 3 den gestrichenen Achsen x', y', z' zuordnen. Dann erhält man aus (36) durch eine leichte Verallgemeinerung:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1 (x - x_0) + \beta_1 (y - y_0) + \gamma_1 (z - z_0), \\ y' &= \alpha_2 (x - x_0) + \beta_2 (y - y_0) + \gamma_2 (z - z_0), \\ z' &= \alpha_3 (x - x_0) + \beta_3 (y - y_0) + \gamma_3 (z - z_0). \end{aligned}\right\} \quad (181)$$

Diesen drei Gleichungen stehen drei ganz entsprechende gegenüber, die man erhält durch die Überlegung, daß die Richtungscos der drei ungestrichenen Achsen x, y, z in bezug auf die gestrichenen x', y', z' der Reihe nach sind: α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, und γ_1, γ_2, γ_3:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y - y_0 &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z - z_0 &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'. \end{aligned}\right\} \quad (182)$$

Um nun die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitskomponenten u', v', w' eines materiellen Punktes, wie sie dem Beobachter B' erscheinen, und den Komponenten u, v, w in bezug auf das ruhende System zu finden, braucht man nur die Gleichungen (181) oder (182) nach der Zeit t zu differenziieren, wobei jedoch zu bedenken ist, daß die Richtungscos im allgemeinen von der Zeit t abhängen.

Eine zweite Differentiation nach der Zeit t liefert die Beziehungen zwischen den Beschleunigungskomponenten $\dot{u}'$, $\dot{v}'$, $\dot{w}'$ einerseits und $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ andererseits, und damit ist die Aufgabe, den Vektor $\dot{\mathfrak{r}}'$ durch den Vektor $\dot{\mathfrak{r}}$ auszudrücken, vollkommen gelöst.

§ 57. Physikalisch schwieriger ist es, den für den Beobachter B' maßgebenden Kraftvektor $\mathfrak{F}'$ zu definieren. Hier bieten sich von vornherein zwei verschiedene Wege, die beide eine Verallgemeinerung der Gleichung (56) darstellen. Man könnte nämlich entweder daran denken, die Kraft $\mathfrak{F}'$ allgemein gleich Masse mal Beschleunigung $\dot{\mathfrak{q}}'$ zu setzen, also auch X' gleich $m\dot{u}'$; oder man könnte allgemein X' gleich $\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z$ setzen. Diese beiden Definitionen widersprechen sich, da im allgemeinen $m\dot{u}'$ von $\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z$ verschieden ist, wie man leicht erkennt, wenn man einerseits die erste der Gleichungen (181) zweimal nach t differentiiert und andererseits die Werte (55) heranzieht.

Eine Entscheidung zwischen diesen beiden Alternativen kann nur dadurch gefunden werden, daß man zurückgeht auf den im § 8 geschilderten grundlegenden Gedankengang für die Bildung des Kraftbegriffes, wonach die Kraft von vornherein nicht als Beschleunigung, sondern als Ursache der Bewegung aufzufassen ist. Wenn nämlich der Beobachter B' allgemein Kraft gleich Masse mal Beschleunigung setzen würde, so wäre er zu der Folgerung genötigt, daß, wenn die auf einen materiellen Punkt wirkende Kraft $\mathfrak{F}' = 0$ ist, die Geschwindigkeit des Punktes $\mathfrak{q}'$ nach Größe und Richtung konstant ist.

Nun gibt es aber einen Fall, in welchem für jeden Beobachter die Kraft unzweifelhaft Null ist, nämlich den, daß der materielle Punkt sich vollkommen isoliert, in unendlicher Entfernung von allen anderen Körpern, im leeren Raum befindet (§ 7). Denn dann existiert keine Ursache der Bewegung, also auch keine Kraft. In diesem Falle wird für den Beobachter B' die Geschwindigkeit des Punktes aber keineswegs an Größe und Richtung konstant sein, wie der einfachste Versuch zeigt, sondern es wird ganz darauf ankommen, wie sich der Beobachter bewegt, ob er z. B. sich dreht. Daher verschwindet $\dot{\mathfrak{q}}'$ nicht allgemein mit $\mathfrak{F}'$, und die ins Auge gefaßte Definition von $\mathfrak{F}'$ ist unhaltbar. Andererseits zeigt die soeben angestellte Überlegung, daß $\mathfrak{F}'$ immer gleichzeitig mit $\mathfrak{F}$ verschwindet, und diese Bedingung führt für die Definition von $\mathfrak{F}'$ auf die zweite der beiden oben genannten Alternativen, indem allgemein gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} X' &= \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z, \\ Y' &= \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z, \\ Z' &= \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z, \end{aligned}\right\} \quad (183)$$

und umgekehrt:

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha_1 X' + \alpha_2 Y' + \alpha_3 Z', \\ Y &= \beta_1 X' + \beta_2 Y' + \beta_3 Z', \\ Z &= \gamma_1 X' + \gamma_2 Y' + \gamma_3 Z'. \end{aligned}\right\} \quad (184)$$

Hiermit ist das Problem der relativen Bewegung im Prinzip gelöst. Denn wenn man einerseits die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}$ aus (184), andererseits die Komponenten der Beschleunigung $\dot{\mathfrak{q}}$ aus (182) entnimmt und diese Werte in (55) einsetzt, erhält man die Beziehungen zwischen $\mathfrak{F}'$ und $\dot{\mathfrak{q}}'$.

Bei der Durchführung dieser Rechnung wollen wir uns aber im Interesse der Einfachheit auf einige spezielle, besonders wichtige Fälle beschränken.

§ 58. Der einfachste Fall ist der, daß das gestrichene Koordinatensystem mit dem ungestrichenen fest verbunden ist, d. h., daß sowohl x_0, y_0, z_0 als auch die 9 Richtungscos unabhängig sind von der Zeit t.

Dann ergibt die Differentiation von (181) und (182) die einfachen Beziehungen:

$$u' = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w, \cdots \quad (185)$$

$$u = \alpha_1 u' + \alpha_2 v' + \alpha_3 w', \cdots \quad (186)$$

$$\dot{u}' = \alpha_1 \dot{u} + \beta_1 \dot{v} + \gamma_1 \dot{w}, \cdots \quad (187)$$

$$\dot{u} = \alpha_1 \dot{u}' + \alpha_2 \dot{v}' + \alpha_3 \dot{w}', \cdots \quad (188)$$

woraus mit Rücksicht auf (183) und (55) folgt:

$$X' = m\dot{u}', \quad Y' = m\dot{v}', \quad Z' = m\dot{w}', \quad (189)$$

d. h. für das gestrichene Bezugssystem gelten die nämlichen Bewegungsgleichungen wie für das ungestrichene, oder: die Bewegungsgleichungen sind in bezug auf die vorgenommene Koordinatentransformation „invariant". Auch die Geschwindigkeit und die Beschleunigung behalten ihre Größe, während sich die Komponenten ändern.

§ 59. Der Anfangspunkt O' des gestrichenen Koordinatensystems bewege sich beliebig, aber die Achsenrichtungen x', y', z' seien stets parallel den Achsen x, y, z.

Dann sind x_0, y_0, z_0 von der Zeit abhängig, während:

$$(190)\quad \begin{cases} \alpha_1 = 1, & \beta_1 = 0, & \gamma_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, & \beta_2 = 1, & \gamma_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, & \beta_3 = 0, & \gamma_3 = 1. \end{cases}$$

In diesem Falle gehen die Gleichungen (181) über in:

$$(191)\quad \begin{cases} x' = x - x_0, \cdots \\ u' = u - u_0, \cdots \\ \dot{u}' = \dot{u} - \dot{u}_0, \cdots \end{cases}$$

und die Gleichungen (183) in:

$$(192)\qquad X' = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z,$$

so daß nach (55) als Bewegungsgleichungen resultieren:

$$(193)\qquad m\dot{u}' = X' - m\dot{u}_0, \cdots$$

abweichend von den Gleichungen (55) für ein ruhendes Bezugssystem. Da sich nun die Bewegungsgleichungen an der Erfahrung prüfen lassen, so besitzt hiernach der Beobachter B' ein Mittel, um durch mechanische Messungen etwas über seine Bewegung gegen ein ruhendes Koordinatensystem zu erfahren. Allerdings kann er nur die Beschleunigungskomponenten $\dot{u}_0$, $\dot{v}_0$, $\dot{w}_0$ messen, nicht aber die Geschwindigkeitskomponenten u_0, v_0, w_0.

In der Tat: setzen wir das gestrichene System als gleichförmig bewegt voraus, also etwa:

$$(194)\qquad x' = x - u_0 t, \quad y' = y - v_0 t, \quad z' = z - w_0 t,$$

wobei u_0, v_0, w_0 konstant, so ergeben sich aus (193) wieder die Gleichungen (189), d. h. die Gleichungen der Mechanik sind auch invariant in bezug auf die Transformation (194), welche nach dem Entdecker des Trägheitsgesetzes auch „Galilei-Transformation" genannt wird. Ein gleichförmig bewegter Beobachter B' wird also niemals durch mechanische Messungen etwas über die Geschwindigkeit seiner Bewegung feststellen können, und man ist überhaupt nicht in der Lage, einen Punkt im Weltenraum anzugeben, von dem man behaupten kann, daß er sich in absoluter Ruhe befindet. Vielmehr bleibt in jeder Geschwindigkeit eine additive Konstante undefiniert und undefinierbar. Dieser Satz wird als das klassische „Prinzip der Relativität" bezeichnet (wohl zu unterscheiden von dem modernen Einsteinschen Prinzip der Relativität, welches die Invarianz der Bewegungsgleichungen in bezug auf die im vorigen Paragraphen besprochene Transformation [Drehung des Koordinatensystems] und die Invarianz in bezug auf die Galilei-Transformation unter einem höheren Gesichtspunkt vereinigt).

Bemerkenswerterweise ist mit der Geschwindigkeit auch die kinetische Energie eines materiellen Punktes nur relativ definierbar, und zwar bleibt in dem Ausdruck der kinetischen Energie nicht nur eine additive Konstante, sondern, da sie quadratisch von der Geschwindigkeit abhängt, sogar eine lineare Funktion der Geschwindigkeit vollkommen unbestimmt! Man ersieht daraus, wie notwendig es ist, bei allen Rechnungen mit mechanischen Größen das zugrunde gelegte Bezugssystem genau zu charakterisieren; sobald dies aber geschehen ist, verschwindet natürlich jede Unbestimmtheit.

§ 60. Eine weitere Anwendung der Gleichungen (193) wollen wir auf die Planetenbewegung machen, indem wir zunächst, wie in § 55 geschildert, die Sonne als frei beweglich ansehen, mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0, und die Bewegung des Planeten in bezug auf einen auf der Sonne befindlichen Beobachter B' untersuchen. Die Richtungen der gestrichenen Koordinatenachsen seien denen der ungestrichenen parallel. Zwar sind uns hier x_0, y_0, z_0 nicht von vornherein als Funktionen der Zeit gegeben, aber wir können diese Größen leicht mit Hilfe der Bewegungsgleichungen für die Sonne finden. Denn nach dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung ist die von dem Planeten m auf die Sonne μ wirkende Anziehungskraft gleich und entgegengesetzt der von der Sonne auf den Planeten wirkenden Kraft X, Y, Z, also:

$$\mu \dot{u}_0 = -X, \; \cdots$$

und dies in (193) eingesetzt, ergibt:

$$m\dot{u}' = X' + X \cdot \frac{m}{\mu}, \; \cdots$$

und nach (192):

$$m\dot{u}' = X \cdot \frac{\mu + m}{\mu}, \; \cdots \tag{195}$$

Nun ist nach (84) und (191):

$$X = -f \cdot \frac{m\mu}{r^2} \cdot \frac{x'}{r}, \; \cdots$$

wobei:

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

folglich lauten die Gleichungen für die relative Bewegung:

$$m\dot{u}' = -f \cdot \frac{m(\mu + m)}{r^2} \cdot \frac{x'}{r}, \; \cdots \tag{196}$$

Dies ist die Bewegung eines materiellen Punktes mit der Masse m, der von einem ruhenden, im Koordinatenanfangspunkt

liegenden Zentrum mit der Masse $\mu + m$ nach dem Gravitationsgesetz angezogen wird. Durch diesen Satz sind die Gesetze der relativen Planetenbewegung zurückgeführt auf die in den Paragraphen 52 bis 54 abgeleiteten Gesetze der absoluten Planetenbewegung. Daß statt des Faktors μ der größere Faktor $\mu + m$ auftritt, wodurch die Anziehungskraft der Sonne stärker erscheint, als sie in Wirklichkeit ist, rührt natürlich daher, daß der Planet der Sonne sich etwas stärker nähert, wenn die Sonne frei beweglich ist, als wenn die Sonne fest ist.

Wir können aber noch einen Schritt weitergehen. Es hindert nichts, genau dieselbe Betrachtung und Rechnung anzustellen für die Bewegung der Sonne relativ zu einem auf dem Planeten befindlichen Beobachter. Denn über das Größenverhältnis der Massen μ und m haben wir keine beschränkende Voraussetzung eingeführt.

Deshalb läßt sich unmittelbar folgender Satz aussprechen: Für einen auf dem Planeten befindlichen Beobachter bewegt sich die Sonne in einer Ellipse (der Ekliptik), in deren einem Brennpunkt der Planet sich befindet, gemäß dem Prinzip der Flächen, genau so, als ob der Planet fest wäre und die Masse $\mu + m$ besäße. Diese Ellipse ist natürlich an Größe und Form dieselbe, wie die der Planetenbahn relativ zur Sonne.

§ 61. Um den irdischen Verhältnissen, auf die wir nun einmal bei allen unseren Beobachtungen angewiesen sind, noch näher zu kommen, untersuchen wir jetzt die Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes für ein mit konstanter positiver Winkelgeschwindigkeit ω rotierendes Koordinatensystem, indem wir zunächst den Anfangspunkt O' des rotierenden Systems mit dem Anfangspunkt O, und die Drehungsachse z' mit der z-Achse des ruhenden Systems zusammenfallen lassen. Ist dann φ der Winkel der x'-Achse mit der x-Achse, so haben wir (Fig. 12):

$$(197)\quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha_1 = \cos\varphi\,, & \beta_1 = \sin\varphi\,, & \gamma_1 = 0\,, \\ \alpha_2 = -\sin\varphi\,, & \beta_2 = \cos\varphi\,, & \gamma_2 = 0\,, \\ \alpha_3 = 0\,, & \beta_3 = 0\,, & \gamma_3 = 1\,, \end{array}\right.$$

wobei gesetzt werden kann:

$$(198)\qquad \varphi = \omega t\,.$$

Dann ergibt sich aus den Gleichungen (181):

$$(199)\quad \left\{\begin{array}{l} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi\,, \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi\,, \\ z' = z\,, \end{array}\right.$$

und durch Differentiation:

$$\left.\begin{aligned} u' &= u\cos\varphi + v\sin\varphi + \omega y', \\ v' &= -u\sin\varphi + v\cos\varphi - \omega x', \\ w' &= w. \end{aligned}\right\} \quad (200)$$

Desgleichen:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}' &= \dot{u}\cos\varphi + \dot{v}\sin\varphi + 2\omega v' + \omega^2 x', \\ \dot{v}' &= -\dot{u}\sin\varphi + \dot{v}\cos\varphi - 2\omega u' + \omega^2 y', \\ \dot{w}' &= \dot{w}. \end{aligned}\right\} \quad (201)$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit m, so folgen, mit Berücksichtigung von (55) und von (183), die gesuchten Bewegungsgleichungen, in welchen wir, da jetzt nur mehr gestrichene Größen vorkommen, die Striche sämtlich fortlassen:

$$\left.\begin{aligned} m\dot{u} &= X + 2m\omega v + m\omega^2 x, \\ m\dot{v} &= Y - 2m\omega u + m\omega^2 y, \\ m\dot{w} &= Z. \end{aligned}\right\} \quad (202)$$

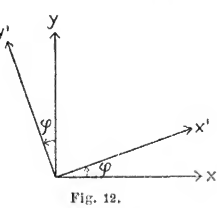


Fig. 12.

Die Gesetze der Mechanik erleiden also für den sich drehenden Beobachter eine Abänderung, die man dahin charakterisieren kann, daß zu der „wahren" Kraft, deren Komponenten X, Y, Z sind, und die etwa durch die Muskeln hervorgebracht wird (§ 8), noch zwei „scheinbare" Kräfte kommen, mit den Komponenten $m\omega^2 x$, $m\omega^2 y$, 0, und $2m\omega v$, $-2m\omega u$, 0. Die erste Zusatzkraft, welche nur von der Lage des Aufpunktes abhängt, ist nach § 25 an Größe gleich, an Richtung gerade entgegengesetzt der Zentripetalkraft bei einer Bewegung des Aufpunktes um die Drehungsachse mit der Winkelgeschwindigkeit ω, sie wird daher als „Zentrifugalkraft" bezeichnet. Die zweite Zusatzkraft, welche nur von der Geschwindigkeit des Aufpunktes im bewegten System abhängt, die „Coriolissche" Kraft, ist rechtwinklig sowohl zu der Drehungsachse z als auch zu der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$, wie man durch Addition ihrer mit u, v, w multiplizierten Komponenten erkennt, und zwar bildet sie mit $\mathfrak{q}$ und z ein rechtshändiges (§ 16) System, das im allgemeinen natürlich nicht rechtwinklig ist; d. h., wenn der Beobachter, dem die z-Achse nach oben geht, in die Richtung $\mathfrak{q}$ blickt, so wirkt für ihn die Coriolissche Kraft nach rechts. Die

Größe dieser Kraft ist das doppelte Produkt der Masse m des Aufpunktes, der Winkelgeschwindigkeit ω und der zur Drehungsachse rechtwinkligen Komponente der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$.

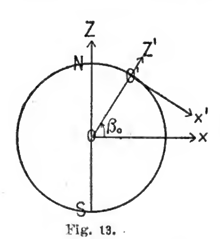


Fig. 13.

§ 62. Wir verlegen jetzt endlich den Anfangspunkt des bewegten Bezugssystems von dem Punkt O der Drehungsachse (dem Erdmittelpunkt) in einen Punkt O' einer Kugelfläche (der Erdoberfläche) mit dem Radius R (dem Erdradius), welche sich mit dem vorhin betrachteten System zusammen dreht. Der Einfachheit halber nehmen wir O' in der (x, z)-Ebene an, der Bildebene in Fig. 13. Die z'-Achse legen wir in die Richtung des Erdradius, nach außen, die y'-Achse machen wir parallel der y-Achse (in der Fig. nach hinten); dann fällt die x'-Achse in die Bildebene. Die Transformation in das neue gestrichene System ergibt uns dann die Gleichungen der Mechanik für einen Beobachter B', der auf der Erdoberfläche so aufgestellt ist, daß ihm die z'-Achse nach oben, die y'-Achse nach Osten, die x'-Achse nach Süden geht.

Da das neue System mit dem vorigen fest verbunden ist, so gelten für diese Transformation die einfachen Beziehungen (185) bis (188). Bezeichnet nun β_0 den Winkel des Erdradius OO' mit der x-Achse (dem Äquator), positiv für die nördliche, negativ für die südliche Halbkugel, so sind die Koordinaten von O' in dem vorigen System:

$$x_0 = R\cos\beta_0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = R\sin\beta_0. \tag{203}$$

Ferner die Richtungscos der gestrichenen in bezug auf die ungestrichenen Achsen:

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_1 = \sin\beta_0, & \beta_1 = 0, & \gamma_1 = -\cos\beta_0, \\ \alpha_2 = 0, & \beta_2 = 1, & \gamma_2 = 0, \\ \alpha_3 = \cos\beta_0, & \beta_3 = 0, & \gamma_3 = \sin\beta_0. \end{array}\right. \tag{204}$$

Folglich nach (187):

$$\begin{aligned} \dot{u}' &= \dot{u}\sin\beta_0 - \dot{w}\cos\beta_0, \\ \dot{v}' &= \dot{v}, \\ \dot{w}' &= \dot{u}\cos\beta_0 + \dot{w}\sin\beta_0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen multiplizieren wir mit m und setzen für $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ ihre Werte aus den Bewegungsgleichungen (202). Schließ-

lich drücken wir alle ungestrichenen Größen durch die gestrichenen aus, nämlich nach (182):

$$x = R\cos\beta_0 + x'\sin\beta_0 + z'\cos\beta_0\,,$$
$$y = y'\,,$$

nach (186):

$$u = u'\sin\beta_0 + w'\cos\beta_0\,,$$
$$v = v'\,,$$

und nach (184):

$$X = X'\sin\beta_0 + Z'\cos\beta_0\,,$$
$$Y = Y'\,,$$
$$Z = -X'\cos\beta_0 + Z'\sin\beta_0\,.$$

Dann ergeben sich die Bewegungsgleichungen für den an der Erdoberfläche in der Richtung des Erdradius aufgestellten Beobachter, wenn wir nun wieder sämtliche Striche gleichzeitig fortlassen, in folgender Form, ohne jede Vernachlässigung:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Süden:} \\ m\dot{u} = X + 2m\omega v\sin\beta_0 + m\omega^2\sin\beta_0(R\cos\beta_0 + x\sin\beta_0 + z\cos\beta_0), \\ \text{Osten:} \\ m\dot{v} = Y - 2m\omega(u\sin\beta_0 + w\cos\beta_0) + m\omega^2 y\,, \\ \text{Oben:} \\ m\dot{w} = Z + 2m\omega v\cos\beta_0 + m\omega^2\cos\beta_0(R\cos\beta_0 + x\sin\beta_0 + z\cos\beta_0). \end{array}\right\} \quad (205)$$

Ist die Entfernung des Aufpunktes vom Standort des Beobachters klein gegen den Erdradius, so kann man die Glieder mit x, y, z gegen die mit R vernachlässigen und erhält einfacher:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Süden:} & m\dot{u} = X + 2m\omega v\sin\beta_0 + m\omega^2 R\sin\beta_0\cos\beta_0\,, \\ \text{Osten:} & m\dot{v} = Y - 2m\omega(u\sin\beta_0 + w\cos\beta_0)\,, \\ \text{Oben:} & m\dot{w} = Z + 2m\omega v\cos\beta_0 + m\omega^2 R\cos^2\beta_0\,. \end{array}\right\} \quad (206)$$

§ 63. Betrachten wir nun zunächst den Fall, daß der Aufpunkt nur der Einwirkung seines eigenen Gewichts unterliegt. Dann ist die auf ihn wirkende Kraft $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg_0$, wo g_0, die Beschleunigung der Schwere für einen nicht mit der Erde bewegten Beobachter, nach (103) den Wert $\frac{fM}{R^2}$ besitzt. Läßt man also den Punkt mit der (relativen) Anfangsgeschwindigkeit Null frei fallen, so gelten, solange die Geschwindigkeit u, v, w noch sehr klein ist, die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{u} = \omega^2 R\sin\beta_0\cos\beta_0\,, \\ \dot{v} = 0\,, \\ \dot{w} = -g_0 + \omega^2 R\cos^2\beta_0\,. \end{array}\right\} \quad (207)$$

Die Beschleunigung ist also konstant, aber ihre Größe und Richtung ist von der von g_0 verschieden. Das Quadrat der Beschleunigung ist:

$$g^2 = \dot{u}^2 + \dot{w}^2 = g_0{}^2 - 2\,g_0\,\omega^2 R \cos^2\beta_0 + \omega^4 R^2 \cos^2\beta_0 .$$

Hier spielt das dritte Glied keine merkliche Rolle, da das Verhältnis $\frac{\omega^2 R}{g_0}$ für:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7{,}272 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{sec}^{-1},$$

$$R = 637 \cdot 10^6\,\mathrm{cm},$$

$$g_0 = 983\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2}\left(\text{gemessene Beschleunigung am Pol, für } \beta_0 = \frac{\pi}{2}\right)$$

den Wert 0,00343 besitzt. Die Beschleunigung selber ergibt sich daher als nahezu:

$$g = g_0 - \omega^2 R \cos^2\beta_0 = 983 - 3{,}37\,\cos^2\beta_0\,, \tag{208}$$

während aus den genauesten Pendelmessungen folgt:

$$g = 983 - 5{,}2\,\cos^2\beta_0\,. \tag{209}$$

Daß die Abnahme der Schwerebeschleunigung mit der Annäherung an den Äquator in Wirklichkeit beträchtlich stärker ist als nach der hier entwickelten Theorie, hat darin seinen Grund, daß die Erde keine genau kugelförmige, sondern eine abgeplattete Gestalt besitzt.

Die Richtung der Schwerebeschleunigung, d. h. die Richtung des Senkbleis oder der Vertikalen, durch welche der Zenithpunkt des Beobachters bestimmt wird, fällt nach (207) nicht mit der z-Achse oder dem Erdradius zusammen, sondern besitzt eine dazu rechtwinklige Komponente. Der Winkel δ mit dem Erdradius beträgt, da er sehr klein ist:

$$\delta = \frac{\omega^2 R \sin\beta_0 \cos\beta_0}{g_0} = \frac{\omega^2 R \sin 2\beta_0}{2\,g_0}. \tag{210}$$

Für die Pole und den Äquator ist $\delta = 0$, auf der nördlichen Halbkugel ist δ positiv, auf der südlichen negativ, d. h. auf jener ist das Senkblei von der Richtung nach dem Erdmittelpunkt gegen Süden abgelenkt, auf dieser gegen Norden. Den Maximalwert erreicht δ für $\beta_0 = \frac{\pi}{4}$, nämlich:

$$\delta_{\max} = \frac{\omega^2 R}{2\,g_0} = 0{,}00171 = 5{,}9^{\mathrm{min}}\,. \tag{211}$$

Durch die Vertikale wird auch die geographische Breite β des Beobachters bestimmt, als der Winkel der Vertikalen mit dem Äquator.

Für diese gilt also die Beziehung:

$$\beta - \beta_0 = \delta. \tag{212}$$

§ 64. Die Bewegungsgleichungen eines schweren Massenpunktes vereinfachen sich etwas, wenn man als z-Achse nicht den Erdradius, sondern die Vertikale wählt, d. h., wenn man in der Tabelle (204) der Richtungs-cos den Winkel β_0 durch die geographische Breite β ersetzt. Denn dann fällt offenbar in den Gleichungen (207) die südliche Komponente der Beschleunigung fort, und die Gleichungen (206) liefern für diesen Fall:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Süden:} & \dot{u} = 2\omega v \sin\beta, \\ \text{Osten:} & \dot{v} = -2\omega(u\sin\beta + w\cos\beta), \\ \text{Zenith:} & \dot{w} = -g + 2\omega v\cos\beta. \end{array}\right\} \tag{213}$$

Verfolgen wir nun die Bewegung des Massenpunktes auch für größere Geschwindigkeiten, indem wir ihn etwa von einem hohen Turm, dessen Höhe h sei, mit der Anfangsgeschwindigkeit Null herabfallen lassen. Auch hier können wir die Betrachtung durch passende Verwertung der Eigentümlichkeiten des Falles erheblich vereinfachen.

Von den 3 Beschleunigungskomponenten ist $\dot{w}$ von höherer Größenordnung als $\dot{u}$ und $\dot{v}$; daher können wir auch u und v gegen w vernachlässigen, und erhalten einfacher:

$$\dot{u} = 0,$$
$$\dot{v} = -2\omega w\cos\beta = -2\omega\cos\beta\cdot\frac{dz}{dt},$$
$$\dot{w} = -g.$$

Mit den Anfangsbedingungen ($t = 0$):

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = h,$$
$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

ergeben die erste und die dritte Gleichung integriert:

$$u = 0, \qquad x = 0,$$
$$w = -gt, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + h,$$

die zweite aber:

$$v = -2\omega\cos\beta\cdot(z - h) = \omega g\cos\beta\cdot t^2,$$
$$y = \frac{1}{3}\omega g\cos\beta\cdot t^3.$$

Als Bahn des frei fallenden Punktes erhalten wir also durch Elimination von t:

$$y = \frac{\omega}{3}\cos\beta\cdot\sqrt{\frac{8(h-z)^3}{g}}, \tag{214}$$

eine Neilsche Parabel (Fig. 14), die in der nach Osten weisenden Vertikalebene verläuft.

Die Abweichung von der durch die Spitze des Turmes ($z=h$) gehenden Vertikalen beträgt am Fußpunkt desselben ($z=0$):

$$y_0 = \frac{\omega}{3} \cos\beta \cdot \sqrt{\frac{8h^3}{g}},$$

also z. B. für $\beta = \frac{\pi}{4}$ und $h = 10^4$ cm:

$$y_0 = 1{,}5^{\text{cm}},$$

in Übereinstimmung mit zahlreichen Messungen. —

Fig. 14.

Wirkt außer der Schwere noch eine andere Kraft mit den Komponenten X, Y, Z auf den Massenpunkt, so verallgemeinern sich die Bewegungsgleichungen (213) zu:

$$(215) \begin{cases} \text{Süden:} & m\dot{u} = X + 2m\omega v \sin\beta, \\ \text{Osten:} & m\dot{v} = Y - 2m\omega(u\sin\beta + w\cos\beta), \\ \text{Zenith:} & m\dot{w} = Z - mg + 2m\omega v\cos\beta. \end{cases}$$

Sechstes Kapitel. Vorgeschriebene Bedingungen.

§ 65. Bisher hatten wir angenommen, daß der betrachtete materielle Aufpunkt keinen anderen Einwirkungen unterliegt als gewissen Kräften, deren jede ihn nach einem bestimmten, als gegeben angenommenen Gesetz in Bewegung zu setzen strebt. Es gibt aber Fälle, wo die Bewegung des Punktes noch durch andere Ursachen beeinflußt wird als durch die von vornherein gegebenen Kräfte, so z. B., wenn der Punkt gezwungen ist, auf einer festen Fläche oder auf einer festen Kurve zu bleiben, allgemeiner: wenn der Bewegung des Punktes von vornherein gewisse feste Bedingungen vorgeschrieben sind; und es fragt sich, nach welchen Grundsätzen derartige Fälle zu behandeln sind.

Zur Lösung dieser Aufgabe gehen wir abermals auf die ursprüngliche Ableitung des Kraftbegriffes (§ 8) zurück. Wenn wir daran festhalten, daß jeder ursächliche Einfluß auf die Bewegung des Punktes sich stets durch eine gewisse Kraft geltend macht, so müssen wir schließen, daß auch eine vorgeschriebene Bedingung nur dadurch physikalisch wirksam werden kann, daß sie sich durch eine gewisse Kraft realisieren läßt. Fügt man diese Kraft zu den übrigen gegebenen Kräften hinzu, so bewegt sich der Punkt ganz

wie der bisher betrachtete sogenannte „freie“ Punkt. Freilich besitzt die so eingeführte neue Art von Kräften wesentlich andere Eigenschaften, als die bisher betrachteten, wie man schon daraus erkennt, daß ihre Größe nicht unmittelbar gegeben ist, sondern von den übrigen Kräften mit abhängt.

Wir wollen eine solche Kraft daher künftig mit dem naheliegenden Namen „Zwangskraft“ $\mathfrak{Z}$ bezeichnen, im Gegensatz zu den bisher ausschließlich betrachteten „treibenden Kräften“ $\mathfrak{F}$, die wir auch weiterhin stets als gegeben annehmen wollen.

Nach dem Gesagten verallgemeinern sich dann die Bewegungsgleichungen (57) zu:

$$m\dot{\mathfrak{q}} = \mathfrak{F} + \mathfrak{Z}, \tag{216}$$

wo $\mathfrak{F}$ die Resultierende aller treibenden Kräfte, $\mathfrak{Z}$ die Resultierende aller Zwangskräfte bezeichnet. Die Gesamtresultierende $\mathfrak{F} + \mathfrak{Z}$ wird auch „bewegende Kraft“ oder „effektive Kraft“ genannt.

Nun ist klar, daß die Gleichungen (216) zur Bestimmung der Bewegung nicht ausreichen; denn es stehen ja 3 neue Unbekannte, die Komponenten von $\mathfrak{Z}$, darin. Wir brauchen also noch 3 weitere Gleichungen, und müssen uns daher nach weiteren Bedingungen umsehen. Da haben wir zunächst die vorgeschriebenen Bedingungen selber, von denen wir jetzt einmal annehmen wollen, daß sie sich durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Koordinaten x, y, z des Aufpunktes darstellen lassen. Eine einzige Gleichung bedeutet, daß der Punkt gezwungen ist, auf einer gegebenen Fläche zu bleiben; zwei Gleichungen bedeuten, daß der Punkt sich nur auf einer gegebenen Kurve bewegen kann. Damit sind alle in Frage kommenden Möglichkeiten erschöpft; denn bei 3 Gleichungen ist der Punkt fest und daher seine Lage unmittelbar für alle Zeiten gegeben.

Die vorgeschriebenen Bedingungen selber genügen aber auch noch nicht; wir brauchen vielmehr noch weitere Eigenschaften der Zwangskraft $\mathfrak{Z}$, und diese können wir nur finden, wenn wir uns die vorgeschriebenen Bedingungen auf irgendeine Weise materiell realisiert denken. Wenn z. B. der Aufpunkt gezwungen ist, auf einer festen Kurve zu bleiben, so denken wir ihn uns etwa in einer festen äußerst engen Röhre beweglich, oder wir denken ihn uns durchbohrt von einem passend gebogenen feinen, aber sehr starken Draht, so daß er längs dem Drahte gleiten kann, in jedem Fall natürlich ganz ohne Reibung, weil die Zwangskraft nur das Verlassen der Kurve verhindert, während sie dagegen für die Be-

wegung längs der Kurve gänzlich bedeutungslos ist. Aus dieser Überlegung folgt unmittelbar, daß die Zwangskraft in der Richtung der Tangente der Kurve keine Komponente besitzen kann, weder beschleunigend, noch verzögernd, oder daß sie normal zur Kurve gerichtet ist, und ganz ebenso müssen wir schließen, daß die von einer festen Fläche herrührende Zwangskraft stets normal zur Fläche wirkt.

Nun ist leicht zu sehen, daß dieser für die Richtung der Zwangskraft gültige Satz zusammen mit den vorgeschriebenen Bedingungen in jedem Falle gerade die 3 Gleichungen liefert, welche wir zur Ergänzung der allgemeinen Bewegungsgleichungen (216) oben als nötig fanden, um sowohl die Bewegung des Aufpunktes, als auch die Größe und Richtung der Zwangskraft zu finden. Denn bei einer festen Kurve haben wir zwei vorgeschriebene Bedingungen, und als dritte Gleichung diejenige, welche ausspricht, daß die Zwangskraft normal zur Kurve wirkt, und bei einer festen Fläche haben wir zwar nur eine einzige vorgeschriebene Bedingung, aber dafür außerdem die beiden Gleichungen, welche ausdrücken, daß die Zwangskraft mit der Normalen der Fläche, also einer ganz bestimmten Richtung, zusammenfällt. Der Vollständigkeit halber können wir auch noch die beiden Grenzfälle des vollkommen freien und des vollkommen festen Punktes hinzufügen. Im ersten Falle sind die 3 Zusatzgleichungen die Gleichungen $\mathfrak{Z} = 0$, im zweiten die Gleichungen $\mathfrak{q} = 0$. Aus (216) folgt dann im ersten Fall die Bewegung des Punktes, im zweiten Fall die Größe und Richtung der Zwangskraft $\mathfrak{Z}$, welche ihn festhält.

Je größer die Anzahl der vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen, desto geringer ist die Zahl der unabhängig veränderlichen, sogenannten freien Koordinaten. Daher spricht man passend von einer größeren oder geringeren Bewegungsfreiheit des Punktes und setzt die Anzahl der freien Koordinaten gleich der Anzahl der Grade seiner Bewegungsfreiheit. Ein Punkt hat 3, 2, 1, 0 Grade von Bewegungsfreiheit, je nachdem er frei, auf einer Fläche, auf einer Kurve beweglich oder fest ist.

Durch die vorstehenden Ausführungen ist die Theorie der Bewegung eines unfreien Punktes im Prinzip erledigt. Es handelt sich jetzt nur mehr um die wichtigsten Anwendungen.

§ 66. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen (216) schreibt man oft in der mehr symmetrischen Form:

(217) $$\mathfrak{F} + \mathfrak{Z} - m\dot{\mathfrak{q}} = 0\,,$$

und kleidet dieselbe in den Satz: Denkt man sich außer der treibenden Kraft $\mathfrak{F}$ und der Zwangskraft $\mathfrak{Z}$ noch eine dritte Kraft $-m\dot{\mathfrak{q}}$ an dem Aufpunkt wirken, so halten sich diese 3 Kräfte im Gleichgewicht. So geringfügig diese Umstellung erscheint, so wichtig ist sie durch die Bequemlichkeit und Anschaulichkeit ihrer Anwendung geworden und hat daher auch als das „Prinzip von d'Alembert" einen besonderen Namen erhalten[1]). Dasselbe führt ganz allgemein die Gesetze der Bewegung auf die des Gleichgewichts zurück, es fügt aber selbstverständlich den Newtonschen Gleichungen sachlich nichts Neues hinzu. Die fingierte Kraft $-m\dot{\mathfrak{q}}$ wird gewöhnlich als „Trägheitswiderstand" bezeichnet.

Statt die Zerlegung der Kräfte nach den festen Koordinatenrichtungen x, y, z vorzunehmen, kann man sie natürlich auch, wie in § 25, in den Richtungen der Tangente τ, der Hauptnormale ν und der Binormale β der Bahnkurve des Aufpunktes ausführen, und erhält dann als Ausdruck des d'Alembertschen Prinzips, mit Rücksicht auf (74a) und (75), sowie darauf, daß die Zwangskraft in der Richtung der Tangente keine Komponente besitzt:

$$\mathfrak{F}_\tau - m\frac{dq}{dt} = 0\,, \tag{218}$$

$$\mathfrak{F}_\nu + \mathfrak{Z}_\nu - \frac{mq^2}{\varrho} = 0\,, \tag{219}$$

$$\mathfrak{F}_\beta + \mathfrak{Z}_\beta = 0\,. \tag{220}$$

Hierbei ist τ in der Richtung der Geschwindigkeit, ν in der Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkt zu nehmen.

Es ist oft die Frage aufgeworfen und lebhaft diskutiert worden, ob der Trägheitswiderstand, bzw. seine Komponente, die Zentrifugalkraft, eine „wirkliche" Kraft ist. Die Antwort auf diese Frage ist leicht zu geben, sobald man sich über die, von vornherein willkürliche, Definition der Kraft entschieden hat. Wenn man, wie wir es im § 9 getan haben, die Kraft gleichgerichtet und proportional der Beschleunigung setzt, dann ist der Trägheitswiderstand keine wirkliche Kraft; denn der Trägheitswiderstand ist nicht gleichgerichtet und proportional der Beschleunigung. Wenn man aber, wogegen nichts einzuwenden ist, die Definition der Kraft so modifiziert, daß alle Kräfte sich stets im Gleichgewicht halten, so muß der Trägheitswiderstand auch mit zu

[1]) Häufig wird auch die aus der Kombination von (217) mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit (321) resultierende Gleichung (383) als d'Alembertsches Prinzip bezeichnet.

den Kräften gerechnet werden. Das Wesentliche sind nicht die Benennungen, sondern die Gleichungen (217), und diese enthalten nicht die geringste Unbestimmtheit.

§ 67. Eine wichtige Eigenschaft der Zwangskraft wollen wir gleich hier zur Sprache bringen. Da die Komponente der Zwangskraft in der Richtung der Geschwindigkeit Null ist, so ist auch die Arbeit der Zwangskraft (§ 47) gleich Null, und zwar gilt dieser Satz offenbar auch für die beiden Grenzfälle des freien und des festen Punktes, weil im ersten Fall $\mathfrak{Z}=0$ und im zweiten Fall $\mathfrak{q}=0$.

Hieraus ergeben sich eine Reihe wichtiger Folgerungen. Denken wir uns zunächst den Aufpunkt in Ruhe, auf einer festen Fläche oder Kurve befindlich, und einer gegebenen treibenden Kraft $\mathfrak{F}$ ausgesetzt.

Im allgemeinen wird er anfangen sich zu bewegen, und zwar in der Richtung der Resultante $\mathfrak{F}+\mathfrak{Z}$. Daher ist die bei der anfänglichen Verschiebung um $d\mathfrak{r}$ von der Gesamtkraft geleistete Arbeit positiv:

$$(\mathfrak{F}+\mathfrak{Z})\cdot d\mathfrak{r}>0\,.$$

Da aber $\mathfrak{Z}\cdot d\mathfrak{r}=0$, so folgt:

$$\mathfrak{F}\cdot d\mathfrak{r}>0\,, \tag{221}$$

d. h. wenn ein freier oder unfreier ruhender Aufpunkt durch eine treibende Kraft in Bewegung gesetzt wird, so ist die Arbeit der treibenden Kraft positiv, oder die anfängliche Verschiebung bildet mit der treibenden Kraft einen spitzen Winkel.

Hat die treibende Kraft ein Potential U, so haben wir mit Rücksicht auf (150):

$$dU<0\,, \tag{222}$$

d. h. beim Eintritt der Bewegung nimmt das Potential ab. Daraus folgt sogleich eine hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht. Wenn nämlich unter allen Verschiebungsrichtungen, die dem beweglichen Aufpunkt vermöge der vorgeschriebenen Bedingungen gestattet sind, sich keine einzige befindet, für welche das Potential abnimmt, so kann auch keine Bewegung eintreten, und der Aufpunkt muß in Ruhe bleiben.

Dies findet sich z. B. verwirklicht, wenn der Aufpunkt sich an einer Stelle seiner Fläche oder Kurve befindet, wo das Potential U ein Maximum oder Minimum ist. Denn dann ist für jede mögliche Verschiebung $\delta U=0$, also die Ungleichung (222) nicht

erfüllbar. Hier befindet sich also der Aufpunkt im Gleichgewicht. Man sieht aber auch weiter, daß, wenn U ein Maximum ist, das Gleichgewicht labil ist. Denn wenn man den Aufpunkt aus der Gleichgewichtslage etwas verschiebt und dann wieder in Ruhe läßt, so wird er natürlich anfangen sich zu bewegen; da aber die Bewegung nach (222) im Sinne abnehmenden Potentials erfolgt, so ist es dem Aufpunkt unmöglich, in seine dem Maximum entsprechende Gleichgewichtslage zurückzukehren. Umgekehrt ist das Gleichgewicht stabil an einer Minimumstelle des Potentials. Bleibt aber das Potential längs eines endlichen Gebiets von Verschiebungen konstant, so ist das Gleichgewicht indifferent; denn dann ist der Aufpunkt an jeder Stelle im Gleichgewicht, weil ihm jede Gelegenheit fehlt, die für den Eintritt der Bewegung notwendige Bedingung (222) zu erfüllen.

Ein anschauliches Beispiel für diese Sätze bietet ein schwerer Punkt auf einer festen Fläche oder Kurve. Hier ist U durch (152) gegeben, und die Bedingung (222) geht über in:

$$dz < 0\,. \qquad (223)$$

Die Bewegung tritt also immer nach abwärts ein. Besitzt die Fläche oder Kurve irgendwo ein Maximum oder ein Minimum ihrer Höhe, so befindet sich dort der Aufpunkt im labilen oder stabilen Gleichgewicht, verläuft sie streckenweise horizontal, so befindet er sich dort im indifferenten Gleichgewicht.

Wenden wir uns nun von einem ursprünglich ruhenden zu einem mit beliebiger Geschwindigkeit bewegten Aufpunkt, so gilt auch für ihn der Satz, daß die Arbeit der Zwangskraft verschwindet, und daß daher von der Arbeit der gesamten Kraft nur die der treibenden Kraft übrig bleibt.

Daher gilt für ihn die Gleichung (147) der lebendigen Kraft genau ebenso, als ob die Zwangskraft und die vorgeschriebenen Bedingungen gar nicht vorhanden wären, und wenn die treibende Kraft ein Potential hat, so gilt auch das Integralprinzip (151) der lebendigen Kraft.

Ein auf einer festen Fläche oder Kurve beweglicher schwerer Massenpunkt besitzt also auf einer bestimmten Höhe immer auch eine bestimmte Geschwindigkeit, einerlei wann, wo und auf welchem Wege er zu dieser Höhe gelangt ist. Je größer die Höhe, desto kleiner die Geschwindigkeit.

Alle die in diesem Paragraphen entwickelten Sätze sind einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig, die im zweiten Kapitel des

zweiten Teiles zur Sprache kommen wird, und bieten daher eine gute Grundlage für das Verständnis derselben.

Wir gehen nun zur Behandlung spezieller Fälle über, und beginnen mit dem einfachsten: einem einzigen Grade von Bewegungsfreiheit.

§ 68. Feste Kurve. Zu den Bewegungsgleichungen (217) kommen hier noch die beiden Gleichungen der Kurve und die Bedingung, daß die Zwangskraft senkrecht steht auf der Kurve:

$$\mathfrak{Z}_x \frac{dx}{ds} + \mathfrak{Z}_y \frac{dy}{ds} + \mathfrak{Z}_z \frac{dz}{ds} = 0, \tag{224}$$

wobei die Richtungs-cos des Kurvenelements ds als gegeben zu betrachten sind.

Fragen wir zunächst nach der Bedingung dafür, daß der Aufpunkt sich unter dem Einfluß einer gegebenen treibenden Kraft $\mathfrak{F}$ im Gleichgewicht befindet. Dann ist die Beschleunigung Null, und durch Elimination von $\mathfrak{Z}$ aus (217) und (224) ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung:

$$\mathfrak{F}_x \frac{dx}{ds} + \mathfrak{F}_y \frac{dy}{ds} + \mathfrak{F}_z \cdot \frac{dz}{ds} = 0. \tag{225}$$

Die treibende Kraft braucht also nicht zu verschwinden, wie beim Gleichgewicht eines freien Punktes, sondern es genügt, wenn sie rechtwinklig zur Kurve gerichtet ist.

Fragen wir weiter nach der Bewegung des Aufpunktes in dem Falle, daß die treibende Kraft Null ist. Dann folgt aus (218):

$$q = \text{const.},$$

d. h. die Geschwindigkeit ist konstant; aus (219) und (220):

$$\mathfrak{Z}_\beta = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z}_\nu = \frac{mq^2}{\varrho},$$

d. h. die Zwangskraft fällt mit der Zentripetalkraft zusammen. Für eine feste Gerade ist die Zwangskraft Null.

§ 69. Wir betrachten jetzt die Bewegung eines schweren Punktes auf einem festen vertikalen Kreisbogen, d. h. ein Kreispendel. Dies wird am einfachsten realisiert durch eine starre gewichtslose Stange, die um einen festen Punkt in einer vertikalen Ebene drehbar ist und am freien Ende den Massenpunkt trägt.

Wir machen die Vertikale, wie gewöhnlich, zur z-Achse, die Kreisebene zur xz-Ebene, und legen den Koordinatenanfangspunkt O in den tiefsten Punkt des Kreises. Sein Radius, die Länge des Pendels, sei l (Fig. 15).

Dann sind die Gleichungen des Kreises:

$$y = 0 \quad \text{und:}$$

$$x^2 + z^2 = 2lz. \tag{226}$$

Da der Aufpunkt nur eine einzige unabhängige Koordinate besitzt, so genügt zur Berechnung der Geschwindigkeit eine einzige Integration der Bewegungsgleichungen. Wir benutzen dazu am bequemsten, nach § 67, das Prinzip der lebendigen Kraft (152a):

$$q^2 + 2gz = q_0^2, \tag{227}$$

wo q_0 die Geschwindigkeit für $z = 0$ bedeutet.

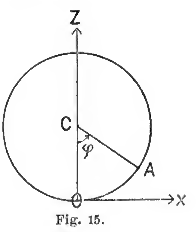


Fig. 15.

Da jeder Höhe z eine bestimmte Geschwindigkeit q entspricht, so ist die Bewegung periodisch. Sie besitzt aber einen ganz verschiedenen Charakter, je nachdem die Geschwindigkeit q_0, mit welcher der Aufpunkt seine stabile Gleichgewichtslage verläßt, hinreicht, um ihn in die labile Gleichgewichtslage: $z = 2l$, zu führen, oder nicht. Im ersten Fall erfolgen die Schwingungen des Pendels alle gleichsinnig, im zweiten Falle kommt das Pendel schon in einer Höhe $z < 2l$ zur Ruhe, und die Schwingungen erfolgen alternierend, hin und her. Der Grenzfall ist der, daß die Anfangsgeschwindigkeit q_0 gerade hinreicht, um die größte Höhe $z = 2l$ mit der Geschwindigkeit $q = 0$ zu erreichen, also, nach (227):

$$q_0 = 2\sqrt{lg}. \tag{228}$$

Dann bleibt der Aufpunkt oben liegen. Ist aber:

$$q_0 < 2\sqrt{lg}, \tag{229}$$

so kommt das Pendel schon für:

$$z = \frac{q_0^2}{2g} \, (< 2l) \tag{230}$$

zur Ruhe und kehrt dann wieder um.

Die Zwangskraft $\mathfrak{Z}$ wird bei dieser Bewegung durch den Zug nach innen oder den Druck nach außen dargestellt, den die Stange auf den Aufpunkt A ausübt, positiv, wenn sie nach dem Krümmungsmittelpunkt C hin, also nach innen, wirkt. In der Tat fällt in (220) die Richtung β, die Binormale, mit y zusammen, und da $\mathfrak{F}_y = 0$, so verschwindet auch $\mathfrak{Z}_y$, und die ganze Zwangskraft $\mathfrak{Z}$ wirkt in der Richtung des Radius.

Da nun weiter $\varrho = l$ und $\mathfrak{F}_\nu = -mg\frac{l-z}{l}$, die Komponente des Gewichts in der Richtung nach C hin, so folgt aus (219):

$$\mathfrak{Z}_\nu = \frac{mq^2}{l} + mg\frac{l-z}{l}.$$

Ein positiver Wert von $\mathfrak{Z}_\nu$ läßt sich auch realisieren durch einen unausdehnbaren Faden anstatt der starren Stange. Wenn aber $\mathfrak{Z}_\nu$ negativ ausfällt, genügt ein Faden nicht mehr zur Aufrechterhaltung der festen Bedingung, und es muß die unzusammendrückbare Stange genommen werden. Die letzte Gleichung zeigt, daß für $z < l$, also in der unteren Hälfte des Kreises, $\mathfrak{Z}_\nu$ immer positiv ist. Hier genügt also unter allen Umständen ein Faden. Im allgemeinen erhalten wir durch Elimination von q aus (227):

$$\mathfrak{Z}_\nu = \frac{m}{l}(q_0^2 + g\cdot[l - 3z]). \tag{231}$$

Mit wachsendem z nimmt $\mathfrak{Z}_\nu$ ab.

Nehmen wir einmal den oben betrachteten Grenzfall (228), in welchem der Aufpunkt gerade noch die höchste Lage erreicht. Dann ist:

$$\mathfrak{Z}_\nu = \frac{mg}{l}(5l - 3z), \tag{232}$$

d. h. die Zwangskraft bleibt positiv bis zur Höhe $z = \frac{5}{3}l$; von da ab wird aus dem Zug ein Druck, und wenn der Aufpunkt die Höhe $2l$ mit der Geschwindigkeit Null erreicht, ist der Druck gleich $-mg$ geworden, entsprechend dem Gewicht des nun ruhenden Punktes.

Für sehr große Werte der Anfangsgeschwindigkeit q_0 bleibt nach (231) $\mathfrak{Z}_\nu$ stets positiv, es genügt also dann ein Faden, um das Pendel herumzuschwingen, wie bei der Schleuder. Der kleinste hierfür zulässige Wert von q_0 ergibt sich aus der Bedingung, daß $\mathfrak{Z}_\nu$ im höchsten Punkt, für $z = 2l$, wo es seinen kleinsten Wert besitzt, Null ist:

$$q_0^2 = 5lg, \tag{233}$$

natürlich etwas größer als der Grenzwert (228).

Aber auch für hinreichend kleine Werte der Anfangsgeschwindigkeit q_0, bei der alternierenden Bewegung, genügt ein Faden statt der Stange, nämlich dann, wenn q_0 kleiner ist als diejenige Anfangsgeschwindigkeit, bei welcher $\mathfrak{Z}_\nu$ in der höchsten Lage (230) gleich Null ist. Dieser Grenzwert ist nach (231):

$$q_0^2 = 2lg. \tag{234}$$

Also nur, wenn q_0^2 zwischen den Grenzen (233) und (234) liegt, ist eine Stange erforderlich, um den Aufpunkt in der Kreisbahn zu erhalten. In allen anderen Fällen genügt ein undehnbarer Faden.

§ 70. Fragen wir nun nach der Beziehung zwischen Ort und Zeit. Dazu ist eine zweite Integration erforderlich, für welche wir zweckmäßig den Elongationswinkel φ (Fig. 15) einführen, durch die Gleichungen:

$$q = \pm l \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{l-x}{l} = \cos\varphi. \tag{235}$$

Dann ergibt sich aus (227) leicht:

$$t = \int_0^\varphi \frac{l \cdot d\varphi}{\sqrt{q_0^2 - 4lg\sin^2\frac{\varphi}{2}}}, \tag{236}$$

indem für $\varphi = 0$ $t = 0$ gesetzt ist.

Dieses elliptische Integral reduziert sich auf eine elementare Funktion nur für den Grenzfall (228), in welchem die Anfangsgeschwindigkeit q_0 gerade hinreicht, um das Pendel in die labile Gleichgewichtslage ($\varphi = \pi$) zu bringen. Die Zeit, die bis dahin verstreicht, ergibt sich aus (236) als logarithmisch unendlich, was daher rührt, daß die Geschwindigkeit zuletzt verschwindend klein ist.

Wir verfolgen weiter den wichtigeren Fall der alternierenden Schwingungen, nehmen also die Ungleichung (229) als erfüllt an. Dann kommt das Pendel nach (230) für den Elongationswinkel φ_1 zur Ruhe, wenn nach (230) und (235):

$$\sin^2\frac{\varphi_1}{2} = \frac{q_0^2}{4lg}. \tag{237}$$

φ_1 ist die Amplitude der Schwingung. Führt man in (236) φ_1 statt q_0 ein, so folgt:

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_1}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}. \tag{238}$$

Da φ mit wachsender Zeit periodisch zu- und abnimmt, so ist die Quadratwurzel abwechselnd positiv und negativ zu nehmen. Wir beschränken daher von jetzt an die Betrachtung auf den

ersten Anstieg des Pendels, d. h. die erste Viertelschwingung. Dann ist die Wurzel positiv, und ebenso φ.

Um das Integral auf seine Normalform zu bringen, führen wir statt φ die Integrationsvariable ϑ ein durch die Beziehung:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \varkappa \cdot \sin\vartheta\,, \tag{239}$$

wobei zur Abkürzung

$$\sin\frac{\varphi_1}{2} = \varkappa \tag{240}$$

gesetzt ist. Dann ergibt sich aus (238):

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\vartheta}}\,. \tag{241}$$

Hier läßt sich die reziproke Quadratwurzel in eine Reihe entwickeln, die um so besser konvergiert, je kleiner die Amplitude ist, und dann die Integration gliedweise ausführen. Wenn man die Reihe bei dem Glied mit $\varkappa^2$ abbricht, so folgt als Näherungswert:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \vartheta + \frac{\varkappa^2}{4} \left(\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right) \right\}. \tag{242}$$

Die erste Viertelschwingung ist beendet, wenn $\varphi = \varphi_1$, und infolgedessen $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ geworden ist. Also haben wir, wenn T die Zeitdauer einer ganzen Schwingung bedeutet:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varkappa^2}{4} \right),$$

und nach (240), da in erster Annäherung der sin durch den Bogen ersetzt werden kann:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_1^2}{16} \right). \tag{243}$$

Für unendlich kleine Amplituden ist also die Schwingungsdauer vollkommen unabhängig von der Amplitude; doch auch schon für Amplituden von einigen Graden ist das Glied mit φ_1 sehr klein.

Will man sich gleich von vornherein auf unendlich kleine Amplituden beschränken, so geht man bei der Ableitung der Schwingungsgesetze einfacher direkt von der Gleichung (218) aus, welche in der Anwendung auf den vorliegenden Fall nach (235) lautet:

$$g \sin\varphi + l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0\,. \tag{244}$$

Ersetzt man hierin sin φ durch φ, so hat man genau die

Differentialgleichung (15), und kann die oben erhaltenen Resultate direkt hierher übertragen.

Die gefundenen Gesetze der unendlich kleinen Schwingungen des Kreispendels lassen eine einfache Verallgemeinerung zu auf die Schwingungen eines schweren Punktes auf einer beliebigen, in einer vertikalen Ebene verlaufenden festen Kurve um seine stabile Gleichgewichtslage. Denn da bei diesen Schwingungen der Aufpunkt sich nur unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, so kommen dabei nur die unendlich benachbarten Punkte der Kurve in Betracht, und es gelten auch hier die Gesetze des Kreispendels, nur daß an die Stelle des Kreisradius l hier der Krümmungsradius der Kurve in ihrem tiefsten Punkt tritt. Bei endlichen Schwingungen dagegen ist auch der weitere Verlauf der Kurve von Einfluß. Ist der Krümmungsradius l durchaus konstant, so nimmt nach (243) die Schwingungsdauer mit wachsender Amplitude zu. Nimmt aber die Krümmung der Kurve mit der Höhe zu, d. h. steigt die Kurve steiler an als der Krümmungskreis in ihrem tiefsten Punkt, so wird die Schwingungsdauer kleiner sein als beim Kreis, und man kann es durch passende Wahl der Krümmung erreichen, daß die Schwingungsdauer auch bei endlichen Schwingungen von der Amplitude unabhängig ist. (Diese Kurve, die sogenannte „Tautochrone“, ist die gemeine Zykloide, erzeugt durch Rollen eines Kreises vom Radius $\frac{l}{4}$.)

§ 71. Feste Fläche. Für einen Massenpunkt, der gezwungen ist, auf einer gegebenen festen Fläche zu bleiben, treten nach § 65 zu den Bewegungsgleichungen (217) noch hinzu erstens die Gleichung der Fläche:

$$f(x, y, z) = 0, \tag{245}$$

und zweitens die Bedingung, daß die Zwangskraft rechtwinklig zur Fläche, also in der Richtung ihrer Normalen, wirkt:

$$\mathfrak{Z}_x : \mathfrak{Z}_y : \mathfrak{Z}_z = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{246}$$

Hieraus sind alle Gesetze der Bewegung, einschließlich der Größe und Richtung der Zwangskraft, eindeutig abzuleiten.

Fragen wir zunächst wieder nach der Bedingung dafür, daß der Aufpunkt sich unter dem Einfluß einer gegebenen treibenden Kraft im Gleichgewicht befindet. Dann ist die Beschleunigung Null, und durch Elimination von $\mathfrak{Z}$ aus (217) und (246) ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung:

(247) $$\mathfrak{Z}_x : \mathfrak{Z}_y : \mathfrak{Z}_z = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Dies sind zwei Gleichungen, während für das Gleichgewicht eines Punktes auf einer festen Kurve nur die einzige Bedingungsgleichung (225) zu erfüllen ist.

Fügen wir hinzu, daß in dem Grenzfall eines freien Punktes die 3 Gleichungen $\mathfrak{F} = 0$, und in dem entgegengesetzten Grenzfall eines festen Punktes gar keine Bedingung für das Gleichgewicht erforderlich ist, so erhellt, daß in jedem aller genannten Fälle die Anzahl der Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht gerade übereinstimmt mit der Anzahl der Freiheitsgrade des Punktes (§ 65), — ein Satz, der später erheblich verallgemeinert werden wird.

Für die Bewegung eines Punktes auf einer festen Fläche in dem Falle, daß die treibende Kraft $\mathfrak{F} = 0$ ist, erhalten wir zunächst aus (218):

(248) $$\frac{dq}{dt} = 0, \qquad q = \text{const.},$$

und aus (219) und (220):

(249) $$|\mathfrak{Z}| = \frac{mq^2}{\varrho},$$

gerade wie bei der kräftefreien Bewegung auf einer festen Kurve. Ein wesentlicher Unterschied ist aber, daß hier weder der Krümmungsradius ϱ, noch überhaupt die Bahnkurve von vornherein bekannt ist, sondern daß diese erst gesucht werden muß. Denn durch den Anfangszustand ist nur die Lage und die Bahntangente gegeben; der weitere Verlauf der Kurve auf der Fläche $f = 0$ ist besonders zu berechnen.

Hierzu dienen die Gleichungen (246), welche mit Rücksicht auf den Umstand, daß die Zwangskraft hier die einzige wirkende Kraft ist, nach (68) und (248) ergeben:

(250) $$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z},$$

d. h. die Hauptnormale in irgendeinem Punkte der Bahnkurve fällt mit der Flächennormalen in diesem Punkte zusammen. Das ist eine besondere Eigenschaft der Bahnkurve, die nicht jede auf der Fläche gezogene Kurve besitzt. Denn z. B. auf einer Kugelfläche ist die Hauptnormale eines beliebigen Schnittkreises der Radius dieses Kreises, während die Flächennormale der Radius der Kugel ist. Eine Kurve von der ausgezeichneten Eigenschaft (250) heißt eine „geodätische Linie“ der Fläche; der Name rührt von einer

weiteren, später (§ 111) abzuleitenden wichtigen Eigenschaft dieser Kurven her. Für die Kugel sind also nach dem Gesagten die geodätischen Linien die größten Kreise, für die Ebene sind es die Geraden; denn die Normale der Ebene ist die auf der Ebene senkrechte Richtung, während für jede ebene Kurve, die keine Gerade ist, die Hauptnormale in der Ebene verläuft.

Ein Massenpunkt auf einer festen Fläche ohne treibende Kraft bewegt sich also auf einer geodätischen Linie mit konstanter Geschwindigkeit. Durch den Anfangszustand ist die Bahn bestimmt; denn durch einen bestimmten Punkt mit einer bestimmten Tangente gibt es nur eine einzige geodätische Linie auf der Fläche. Dies ergibt sich am deutlichsten, wenn man bedenkt, daß durch das erste Kurvenelement und durch die bekannte Flächennormale im Endpunkt des Elementes die Krümmungsebene der Kurve, und durch deren Schnittpunkte mit der Fläche das zweite Kurvenelement bestimmt wird, und so sukzessive weiter.

Auf einer Kugel bewegt sich daher ein kräftefreier Massenpunkt in demjenigen größten Kreise, auf einer Ebene in derjenigen Geraden, welche durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bestimmt wird. Die Größe der Zwangskraft ergibt sich in jedem Falle aus (249).

§ 72. Wir betrachten jetzt die Bewegung eines schweren Punktes auf einer festen Kugelfläche, d. h. ein sphärisches Pendel. Dies wird am einfachsten realisiert durch eine starre gewichtslose Stange, die um einen festen Punkt nach allen Richtungen drehbar ist und am freien Ende den Massenpunkt trägt. Die Richtung der Zwangskraft fällt nach (246) mit dem Kugelradius zusammen. Wirkt sie in der Richtung nach dem Kugelmittelpunkt, so kann die starre Stange durch einen unausdehnbaren Faden ersetzt werden.

Wir beschränken uns im folgenden auf die Bestimmung der Bewegung des Pendels. Legen wir wieder den Koordinatenanfangspunkt in den tiefsten Punkt der Kugel und die z-Achse vertikal nach oben, so ist die Gleichung der Kugel vom Radius l:

$$x^2 + y^2 + (l - z)^2 = l^2. \tag{251}$$

Hierzu kommt nach § 67 und (152a) die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$q^2 + 2gz = c. \tag{252}$$

Außerdem brauchen wir hier noch ein zweites Integral der

Bewegungsgleichungen, als welches wir nach § 51 das Prinzip der Flächen in seiner erweiterten Fassung benutzen können. Denn die gesamte auf den Aufpunkt wirkende Kraft, d. h. die Resultierende aus dem Gewicht und der Zwangskraft, geht zwar nicht durch ein festes Zentrum, wohl aber durch eine feste Gerade, nämlich durch die Vertikale im Kugelmittelpunkt. Daher gilt für die Projektion des Aufpunktes auf die xy-Ebene die Gleichung (161):

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c', \tag{253}$$

wobei:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{254}$$

Zur Bestimmung der Bahn führen wir überall statt der geradlinigen Koordinaten x, y, z die Zylinderkoordinaten r, φ, z ein. Dann wird aus (251):

$$r^2 + z^2 = 2lz \tag{255}$$

und aus (252), mit Rücksicht auf (166):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2gz = c. \tag{256}$$

Weiter ergibt die Elimination von dt mittelst (253), sowie die von r^2 und rdr mittelst (255) und der daraus abgeleiteten Differentialgleichung:

$$rdr = (l - z)\,dz \tag{257}$$

die folgende Beziehung zwischen φ und z:

$$d\varphi = \frac{l \cdot c' \cdot dz}{(2l - z) \cdot z \cdot \sqrt{(c - 2gz) \cdot (2l - z) \cdot z - c'^2}}. \tag{258}$$

Dies führt im allgemeinen auf ein elliptisches Integral. Da nach (253) sich φ immer in gleichem Sinne mit t ändert, können wir, ohne die Allgemeinheit wesentlich zu beschränken, φ stets als wachsend, also c', ebenso wie c, als positiv voraussetzen. Dagegen wird z abwechselnd zu- und abnehmen, und dementsprechend die Quadratwurzel in (258) positiv oder negativ zu nehmen sein. Das Verschwinden der Wurzel gibt die höchste und die tiefste Lage des Pendels. Die Gleichung dafür ist zwar kubisch in bezug auf z, hat also 3 Wurzeln, aber man überzeugt sich leicht, daß eine Wurzel größer als $2l$ ist und daher keine physikalische Bedeutung besitzt. Denn der Ausdruck unter der Wurzel wechselt das Vorzeichen, wenn man z von $2l$ bis ∞ wachsen läßt.

Natürlich ist z periodisch in bezug auf φ. Aber die Bahnkurve ist nur dann geschlossen, wenn ein ganzes Vielfaches der

Periode von φ gleich einem ganzen Vielfachen von 2π ist, d. h. wenn das Verhältnis dieser Periode zu π rational ist.

Wenn das Maximum und das Minimum von z zusammenfallen, oder wenn die beiden in Betracht kommenden Wurzeln der genannten kubischen Gleichung einander gleich werden, so bleibt das Pendel konstant auf derselben Höhe z und führt horizontale kreisförmige Schwingungen aus; auch r und $\frac{d\varphi}{dt}$ sind dann konstant. Man erhält diese Werte, wenn man den Radikandus in (258) nach z differentiiert und gleich Null setzt:

$$(c-2gz)(l-z)-g(2lz-z^2)=0,$$

oder nach (252) und (255):

$$q^2(l-z)-gr^2=0. \tag{259}$$

Diese Gleichung läßt sich für jeden beliebigen Wert von z zwischen 0 und l, also auf der unteren Kugelhälfte, erfüllen. Das entsprechende r ergibt sich aus (255), dann q und die Winkelgeschwindigkeit aus (259):

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{q}{r}=\sqrt{\frac{g}{l-z}}. \tag{260}$$

Für $z=l$ wird die Winkelgeschwindigkeit unendlich, für unendlich kleine z nimmt sie einen bestimmten endlichen Wert an, und zwar gerade denjenigen, welcher der Schwingungsdauer (243) eines Kreispendels von unendlich kleiner Amplitude entspricht.

Die Zwangskraft, d. h. die Spannung des Pendelfadens, steht nach § 66 mit der Zentrifugalkraft $\frac{mq^2}{r}$ und der Schwere mg im Gleichgewicht. In der Tat geht die Resultierende der beiden letzteren Kräfte durch den Mittelpunkt der Kugel, da ihr Quotient nach (259) gleich ist der Tangente des Elongationswinkels: $\frac{r}{l-z}$ (Fig. 16). Die Größe der Spannung ist:

$$m\sqrt{\frac{q^4}{r^2}+g^2}=\frac{mlg}{l-z}, \tag{261}$$

Fig. 16.

sie wird für $z=0$ gleich mg, für $z=l$ gleich unendlich, wie natürlich.

§ 73. Wenden wir uns jetzt noch zu der Betrachtung unendlich kleiner Schwingungen eines sphärischen Pendels im allgemeinen, so können wir dabei wieder von (258) ausgehen und dort diejenigen

Vereinfachungen einführen, die für unendlich kleine Schwingungen charakteristisch sind. Zu diesem Behufe nehmen wir an, daß im Anfangszustand sowohl r, die Elongation, als auch q, die Geschwindigkeit, unendlich klein von der ersten Größenordnung sind, während φ und $\frac{d\varphi}{dt}$ endlich sein können. Dann ist nach (255) die Höhe z, und nach (252) und (253) auch die Konstante c und die Konstante c' unendlich klein von der zweiten Größenordnung, und daraus folgt, daß für die ganze Dauer der Bewegung alle diese Größenordnungen bestehen bleiben.

Die Kurve des Aufpunktes fällt also bis auf Größen zweiter Ordnung mit ihrer Projektion auf die xy-Ebene zusammen, d. h. sie ist nahezu eine ebene horizontale, und die Gleichung (255) vereinfacht sich zu:

$$r^2 = 2lz. \tag{262}$$

Betrachten wir nun die Differentialgleichung (258) mit Rücksicht auf die vorliegenden beschränkenden Vereinfachungen, so findet sich, daß darin mit großer Annäherung der Faktor $2l-z$ durch $2l$ ersetzt werden kann. Dies ist aber auch die einzige zulässige Vereinfachung; denn im übrigen besitzen in allen Summen und Differenzen die einzelnen Glieder die nämliche Größenordnung. Wir erhalten also nun als Differentialgleichung für unendlich kleine Schwingungen:

$$d\varphi = \frac{c'dz}{2z\sqrt{2lz(c-2gz)-c'^2}}.$$

Integriert:

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{lcz-c'^2}{z\sqrt{l^2c^2-4lgc'^2}}, \tag{263}$$

wobei wir die Integrationskonstante gleich Null setzen, auf Grund der nämlichen Überlegung wie bei der Integration von (168).

Da die Kurve nahezu in der xy-Ebene verläuft, so führen wir in (263) an Stelle von φ und z die rechtwinkligen Koordinaten x und y ein, nach (262) und (254), und erhalten dann folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{264}$$

wobei a^2 und b^2 die beiden Werte sind, welche der Ausdruck:

$$\frac{2lc'^2}{lc \pm \sqrt{l^2c^2-4lgc'^2}} \tag{265}$$

besitzt, je nachdem der Quadratwurzel das eine oder das andere

Vorzeichen gegeben wird. Die Kurve ist also eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. Um zu erfahren, wie diese Ellipse durchlaufen wird, setzen wir:

$$x = a \cos \vartheta, \quad y = b \sin \vartheta, \tag{266}$$

wodurch die Gleichung (264) identisch erfüllt wird, und suchen die Abhängigkeit des Hilfswinkels ϑ von der Zeit t. Hierfür ergibt sich aus (253):

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = ab \frac{d\vartheta}{dt} = c',$$

also:

$$\vartheta = \frac{c'}{ab} \cdot t, \tag{267}$$

wenn für $t = 0$ $\vartheta = 0$ gesetzt wird; also eine höchst einfache Beziehung. Die Werte von a und b aus (265) eingesetzt, ergeben:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t,$$

und dies in (266) substituiert, liefert:

$$x = a \cos t \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{und} \quad y = b \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{268}$$

wodurch die Bewegung bis in alle Einzelheiten bestimmt ist. Denn a und b sind durch (265), z durch (262) gegeben. Die Schwingungsdauer ist von a und b unabhängig und wieder die nämliche wie bei einem Kreispendel von unendlich kleiner Amplitude.

Es ist von Interesse zu bemerken, daß die hier gefundene Bewegung vollkommen übereinstimmt mit derjenigen eines frei beweglichen Massenpunktes, der sich in der xy-Ebene unter dem Einfluß einer gewissen vom Anfangspunkt O ausgehenden Zentralkraft befindet. Denn eine solche Bewegung wird, wie wir in § 52 sahen, bestimmt durch die beiden Gleichungen des Prinzips der Flächen und des Prinzips der lebendigen Kraft. Das erstere ist hier nach (253) erfüllt, aber auch das zweite ist als erfüllt anzusehen, wenn wir die Gleichung (252) mit Berücksichtigung von (262) schreiben:

$$\frac{mq^2}{2} + \frac{mgr^2}{2l} = \text{const.}, \tag{269}$$

und wenn wir andererseits bedenken, daß für die angenommene Zentralbewegung das Prinzip der lebendigen Kraft in der aus (151), (109) und (108) folgenden Form gilt:

$$\frac{1}{2} mq^2 + \int f(r) dr = \text{const.},$$

wo $f(r)$ nach Größe und Vorzeichen die anziehende Kraft bedeutet. Der Vergleich mit (269) ergibt:

$$f(r) = \frac{mg}{l} \cdot r, \tag{270}$$

d. h. die Kraft ist eine anziehende und proportional der Entfernung von O. Daß dieses Anziehungsgesetz zu den Bewegungsgleichungen (268) führt, und zwar nicht nur für unendlich kleine, sondern für beliebig große Schwingungen, läßt sich natürlich auch direkt ableiten.

§ 74. Wir wollen jetzt noch den Einfluß der Erddrehung auf die Schwingungen eines sphärischen Pendels untersuchen. Hierfür bieten sich die Gleichungen (215), welche für einen auf der Erdoberfläche unter der geographischen Breite β aufgestellten Beobachter die Bewegungsgesetze eines materiellen Punktes m aussprechen, auf den außer seinem eigenen Gewichte noch eine Kraft mit den Komponenten X, Y, Z wirkt. Ist nun S die Spannung des Fadens, so ist:

$$X = -S \cdot \frac{x}{l}, \quad Y = -S \cdot \frac{y}{l}, \quad Z = -S \cdot \frac{z-l}{l},$$

und die Bewegungsgleichungen lauten:

$$(271) \begin{cases} \text{Süden:} \quad m\dot{u} = -S \cdot \frac{x}{l} + 2m\omega v \sin\beta, \\ \text{Osten:} \quad m\dot{v} = -S \cdot \frac{y}{l} - 2m\omega(u \sin\beta + w\cos\beta), \\ \text{Zenith:} \quad m\dot{w} = -S \cdot \frac{z-l}{l} - mg + 2m\omega v \cos\beta. \end{cases}$$

Diese Gleichungen zusammen mit (251) enthalten die vollständige Lösung der Aufgabe.

Fragen wir nun, ob die Prinzipien der lebendigen Kraft und der Flächen hier noch gelten. Zu dem Zwecke multiplizieren wir, wie in § 47, die Bewegungsgleichungen der Reihe nach mit u, v, w, addieren und integrieren. Dann fallen sowohl die Glieder mit S, als auch die Glieder mit ω fort, die ersteren, weil die Gleichung (251) für alle Zeiten gilt, also auch nach t differentiiert werden darf, und es ergibt sich die Gültigkeit des Prinzips der lebendigen Kraft genau in der Form (252).

Es bleibt noch das Prinzip der Flächen. Wir multiplizieren, wie in § 50, die erste Bewegungsgleichung mit y, die zweite mit x, und subtrahieren; dann folgt:

$$x\dot{v} - y\dot{u} = -2\omega(xu \sin\beta + xw\cos\beta + yv\sin\beta).$$

Jetzt setzen wir wieder unendlich kleine Schwingungen voraus. Dann wird w gegen u und v unendlich klein von der zweiten Größenordnung, und mit Weglassung des Gliedes mit w folgt durch Integration:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = -\omega r^2 \sin\beta + \text{const.} \tag{272}$$

Das Prinzip der Flächen gilt also hier nicht. Indessen können wir durch eine einfache Substitution eine anschauliche Vorstellung von der Bewegung gewinnen. Setzen wir nämlich:

$$\varphi' = \varphi + \omega \sin\beta \cdot t, \tag{273}$$

so geht (272) über in:

$$r^2 \frac{d\varphi'}{dt} = \text{const.}, \tag{274}$$

d. h. das Prinzip der Flächen ist erfüllt für ein Koordinatensystem, welches sich um die z-Achse, die Vertikale, mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega \sin\beta$ dreht. Denn für ein konstantes φ' ist:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega \sin\beta.$$

Beziehen wir also die Pendelschwingungen auf dieses sich drehende Koordinatensystem, so zeigt sich, daß dann überhaupt ganz dieselben Gesetze gelten, wie die, welche im § 73 für ein absolut ruhendes System abgeleitet wurden. Um dies zu beweisen, ist nur noch der Nachweis der Gültigkeit des Prinzips der lebendigen Kraft auch für das sich drehende System erforderlich. Denn dieses zusammen mit dem Prinzip der Flächen bestimmt die Bewegung auf der Kugelfläche eindeutig. Schreiben wir nun (269) in Polarkoordinaten, mit Vernachlässigung von w^2:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{g r^2}{l} = \text{const.}, \tag{275}$$

und führen wir hier nach (273) φ' statt φ ein, so ergibt sich:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2 - 2\omega \sin\beta r^2 \frac{d\varphi'}{dt} + r^2 \left(\omega^2 \sin^2\beta + \frac{g}{l}\right) = \text{const.},$$

eine Beziehung, welche, wenn man (274) berücksichtigt, genau die Form (275) hat, nur daß φ' statt φ steht und daß die Konstanten etwas geändert sind.

Wir können daher den Satz aussprechen, daß relativ zu der sich drehenden Erde die Pendelschwingungen von unendlich kleiner Amplitude genau ebenso erfolgen wie relativ zu der ruhenden Erde, also in einer Ellipse, nur daß die Achsen der Ellipse sich mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega \sin\beta$, d. h. auf der nördlichen

Halbkugel ($\beta > 0$) in der Richtung Süden—Westen—Norden—Osten, auf der südlichen Halbkugel in umgekehrter Richtung drehen. Am Äquator verschwindet das Phänomen ganz, an den Polen erreicht es ein Maximum.

Eine Bestätigung der Theorie gibt der berühmte Foucaultsche Pendelversuch.

§ 75. Wir wollen zum Schluß noch den Fall untersuchen, daß die vorgeschriebenen Bedingungen von der Zeit abhängig sind, d. h. daß der Aufpunkt gezwungen ist, auf einer Kurve oder Fläche zu bleiben, die sich in gegebener Weise bewegt.

Dann enthalten die Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ außer den Koordinaten x, y, z des Aufpunktes auch die Zeit t explizite. Die Behandlung der Aufgabe, bei gegebener treibender Kraft $\mathfrak{F}$ die Bewegung des Aufpunktes zu bestimmen, läßt sich nach genau denselben Grundsätzen einrichten, die im § 65 zur Sprache gekommen sind, und führt zu genau demselben Resultat, d. h. die Bewegung ist bestimmt durch die 3 Bewegungsgleichungen (216), bzw. das d'Alembertsche Prinzip (217) in Verbindung mit den weiteren 3 Gleichungen, welche die vorgeschriebenen Bedingungen ausdrücken, sowie den Satz, daß die Zwangskraft $\mathfrak{Z}$ rechtwinklig zur Kurve oder Fläche gerichtet ist.

Dagegen verlieren die in den späteren §§ 66 und 67 abgeleiteten Sätze hier im allgemeinen ihre Gültigkeit. Insbesondere ist es nicht mehr richtig, daß die Zwangskraft $\mathfrak{Z}$ rechtwinklig zur Tangente der Bahnkurve des Aufpunktes gerichtet ist. Denn die Bahnkurve hat im allgemeinen eine andere Tangente als die vorgeschriebene Kurve oder Fläche.

Dies wird am deutlichsten durch ein einfaches Beispiel. Der Aufpunkt sei gezwungen, auf einer Geraden zu bleiben, die sich mit gegebener Winkelgeschwindigkeit in einer (horizontalen) Ebene dreht. Ot sei die Lage der Geraden zur Zeit t, Ot' diejenige zur unendlich benachbarten Zeit t' (Fig. 17). Der Aufpunkt befinde sich zur Zeit t in A, zur Zeit t' in A'. Dann ist die Tangente der Bahnkurve AA', dagegen die Tangente der vorgeschriebenen Kurve AB, und diese beiden Richtungen bilden im allgemeinen einen endlichen Winkel miteinander. Da nun die Zwangskraft $\mathfrak{Z}$ rechtwinklig zu AB wirkt, wird sie

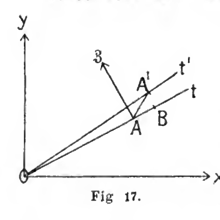


Fig 17.

im allgemeinen mit AA' einen spitzen oder stumpfen Winkel bilden. Daraus folgt, daß die Arbeit der Zwangskraft nicht, wie in § 67, Null ist, und auch, daß das Prinzip der lebendigen Kraft im allgemeinen nicht erfüllt ist, auch wenn die treibende Kraft ein Potential hat.

Führen wir die Rechnung für das angenommene einfache Beispiel durch, unter der Annahme, daß die Winkelgeschwindigkeit ω konstant ist, und daß gar keine treibende Kraft wirkt. Der Mittelpunkt O der Drehung sei der Koordinatenanfangspunkt, ihre Ebene die (x, y)-Ebene. Dann sind die Bewegungsgleichungen nach (216):

$$m\dot{u} = \mathfrak{Z}_x, \quad m\dot{v} = \mathfrak{Z}_y, \tag{276}$$

die Gleichung der vorgeschriebenen Bedingung:

$$y = x \operatorname{tg}(\omega t), \tag{277}$$

und der Satz über die Richtung der Zwangskraft:

$$x\mathfrak{Z}_x + y\mathfrak{Z}_y = 0. \tag{278}$$

Hierdurch und durch den Anfangszustand ist die Bewegung bestimmt. Zunächst ergibt sich durch Elimination von $\mathfrak{Z}_x$ und $\mathfrak{Z}_y$:

$$x \cdot \dot{u} + y \cdot \dot{v} = 0, \tag{278a}$$

und mit Einführung von Polarkoordinaten r und φ, nach (254), und Berücksichtigung von (277):

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0. \tag{278b}$$

Diese Gleichung läßt sich Glied für Glied integrieren, wenn man sie mit $\dot{r}$ multipliziert, und liefert dann:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = \text{const.}$$

Nehmen wir an, daß im Anfangszustand $r = a$, und $\dot{r} = 0$, so ergibt sich der Wert der Integrationskonstanten, und damit die Differentialgleichung:

$$dt = \frac{dr}{\omega\sqrt{r^2 - a^2}},$$

aus deren Integration folgt:

$$r = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}). \tag{279}$$

Der Aufpunkt wird also mit immer schneller wachsender Geschwindigkeit nach außen geschleudert, was sich auch leicht aus dem Umstand erklärt, daß, wie die Fig. 17 erkennen läßt, die Zwangskraft stets positive Arbeit leistet. Als Bahnkurve ergibt sich aus (279) und (277):

$$r = \frac{a}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}), \tag{280}$$

eine logarithmische Spirale, deren Form unabhängig ist von ω.

Es liegt nahe, die Frage aufzuwerfen, wie es sich, da doch das mechanische Prinzip der lebendigen Kraft hier verletzt ist, mit dem universell gültigen Prinzip der Erhaltung der Energie (§ 49) in dem vorliegenden Falle verhält. Das letztere Prinzip bewahrt natürlich auch hier seine Gültigkeit; in der Tat entsteht die lebendige Kraft des Aufpunktes keineswegs aus dem Nichts, sondern sie wird geliefert durch die Arbeit derjenigen Kraftquelle, welche die Drehung der Geraden besorgt. Denn um die vorgeschriebene Bedingung, die konstante Winkelgeschwindigkeit der Drehung, aufrecht zu erhalten, ist eine Kraft nötig, die von außen geliefert werden muß, und die um so größer wird, je weiter der Massenpunkt sich nach außen bewegt. Die Arbeit dieser Kraft ist nach dem Energieprinzip genau gleich der Zunahme der lebendigen Kraft des materiellen Aufpunktes.

Allgemeiner können wir sagen, daß in jedem Falle, wo eine vorgeschriebene Bedingung die Zeit t explizite enthält, die Aufwendung einer gewissen äußeren Arbeit nötig sein wird, um dieselbe aufrecht zu erhalten, während die von der Zeit unabhängigen Bedingungen zu ihrer Realisierung keiner äußeren Arbeitsleistung bedürfen, entsprechend dem Umstand, daß die Arbeit der Zwangskraft bei ihnen stets Null ist (§ 67).

Zweiter Teil.

Mechanik eines Systems materieller Punkte.

§ 76. In der Natur haben wir es nicht mit materiellen Punkten, sondern mit materiellen Körpern von endlicher Ausdehnung zu tun. Wir können aber jeden Körper als zusammengesetzt ansehen aus sehr vielen materiellen Punkten, und die Verschiedenheiten in den mechanischen Eigenschaften der Körper darauf zurückführen, daß ihre einzelnen Punkte mit verschiedenen Kräften aufeinander wirken. Dann ist auch die Frage nach den Bewegungsgesetzen materieller Körper zurückgeführt auf die Mechanik materieller Punktsysteme.

Von diesem Standpunkt aus betrachtet gibt es in der Natur überhaupt keine anderen mechanischen Kräfte als solche zwischen materiellen Punkten. Jeder materielle Punkt bewegt sich gemäß der Resultierenden der Kräfte, die von allen übrigen Punkten des Universums auf ihn ausgeübt werden. Wenn einmal von einer Kraft die Rede ist, die ein ganzer Körper ausübt oder erleidet, so ist das nicht wörtlich, sondern nur als eine abkürzende Ausdrucksweise zu verstehen. In Wirklichkeit sind nur die einzelnen Punkte des Körpers einerseits Ursprung, andererseits Angriffsstelle von Kräften. Denn eine jede Kraft wirkt von einem bestimmten materiellen Punkt A auf einen zweiten bestimmten materiellen Punkt B.

Daher lassen sich alle Kräfte der Natur paarweise einander zuordnen, insofern jeder einzelnen Kraft diejenige entspricht, welche von dem zweiten Punkte B auf den ersten Punkt A ausgeübt wird, und je zwei solche sich entsprechenden Kräfte sind nach dem Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion (§ 29) einander an Größe gleich, an Richtung entgegengesetzt.

Erstes Kapitel. Statik eines starren Körpers.

§ 77. Wir wollen uns zunächst speziell mit der Mechanik ruhender Punktsysteme, d. h. mit der Statik, beschäftigen, und

zwar wählen wir zur Betrachtung zuerst ein solches System aus, dessen Punkte vermöge der zwischen ihnen wirkenden Kräfte stets konstante Entfernungen behalten, und das daher als „starrer" Körper bezeichnet wird. Ein starrer Körper ist in allen seinen Teilen von absolut unveränderlicher Gestalt, als Ganzes aber kann er durch die kleinste Kraft in Bewegung gesetzt werden. Vollkommen starre Körper kommen in der Natur nicht vor, aber annähernd werden sie verwirklicht durch die dem festen Aggregatzustand angehörenden Körper. Doch nicht auf diesem Umstand allein beruht die Wichtigkeit der starren Körper für die Theorie, sondern vielmehr darauf, daß die Mechanik beliebiger Punktsysteme sich zurückführen läßt auf die Mechanik starrer Körper (vgl. unten § 130).

Die Aufgabe, deren Behandlung dieses Kapitel gewidmet sein soll, ist die folgende. Gegeben sei ein ruhender starrer Körper von beliebigen Dimensionen, an welchem in bestimmten gegebenen Punkten, den „Angriffspunkten", Kräfte von gegebener Größe und Richtung wirken. Gefragt ist nach der Bedingung, unter der sich die Kräfte im Gleichgewicht halten, oder, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, welche Kraft oder welche Kräfte man noch dazu anbringen muß, um das Gleichgewicht herzustellen.

Wir lösen die Aufgabe, indem wir die gegebenen Kräfte auf eine möglichst einfache Form reduzieren, und gehen dabei von spezielleren Fällen zu dem allgemeinen Fall über. Der einfachste Fall ist der, daß nur zwei Kräfte vorhanden sind. Damit zwei Kräfte sich an einem starren Körper das Gleichgewicht halten, ist offenbar notwendig, daß sie an Größe einander gleich, an Richtung entgegengesetzt sind. Aber dies genügt noch nicht. Es ist vielmehr zum Gleichgewicht außerdem noch erforderlich, daß die Verbindungslinie der Angriffspunkte AB (Fig. 18) mit der Richtung der Kräfte zusammenfällt. Denn würde z. B. die zweite Kraft statt in B in B' angreifen, so würde kein Gleichgewicht bestehen, sondern es würde eine drehende Bewegung eintreten.

Die genannte Bedingung hinsichtlich der Richtung von AB genügt in der Tat für das Gleichgewicht. Auf die Länge der Strecke AB oder auf die Form des Körpers kommt es dabei gar nicht an. Letzteres erkennt man leicht, wenn man sich zunächst den Körper vollkommen symmetrisch um die Verbindungslinie AB und auch symmetrisch zu der Halbierungsebene der Strecke AB angeordnet denkt (s. Fig.). Daß dann Gleichgewicht besteht, wird niemand bezweifeln. Dieses Gleichgewicht kann aber unmöglich

gestört werden, wenn der Körper durch Anlagerung beliebiger Massen, auf die gar keine Kräfte wirken, vergrößert wird.

Aus dem entwickelten Satze folgt sogleich, daß die physikalische Bedeutung einer Kraft, die an einem starren Körper angreift, in keiner Weise geändert wird, wenn man ihren Angriffspunkt in der Richtung der Kraft um eine beliebige Strecke verschiebt. Denn man kann jedenfalls, ohne irgendeine Störung hervorzurufen, in einem auf der Geraden AB gelegenen beliebigen Punkt C des Körpers zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte F anbringen (Fig. 18). Da nun die in C nach rechts wirkende und die in A nach links wirkende Kraft sich im Gleichgewicht halten, so kann man diese beiden Kräfte gleichzeitig weglassen, und be-

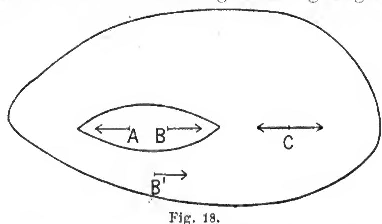


Fig. 18.

hält so statt der in A nach links wirkenden Kraft die in C nach links wirkende Kraft übrig. Nach einer anderen Richtung als nach der der Kraft (oder der entgegengesetzten Richtung) darf man aber den Angriffspunkt einer Kraft nicht verschieben, ohne die physikalische Bedeutung der Kraft zu ändern. Man ersieht daraus, daß außer der Größe und der Richtung auch der Angriffspunkt einer Kraft eine gewisse charakteristische Rolle spielt und daher stets besonders gegeben sein muß, wenn die Kraft als vollständig bekannt angenommen werden soll.

Selbstverständlich ist die Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft ohne weiteres nur innerhalb des Körpers gestattet. Man kann aber die Verschiebung auch über die Körpergrenze hinaus erstrecken, wenn man nur dafür sorgt, daß der Angriffspunkt der Kraft mit dem Körper starr verbunden bleibt.

§ 78. Wirken an einem starren Körper mehrere Kräfte, deren Richtungen sich alle in einem Punkt schneiden, so ist es leicht, sie zu einer resultierenden Kraft zu vereinigen, dadurch nämlich, daß man zunächst die Angriffspunkte an den gemeinsamen Schnitt-

punkt verlegt, den man sich, falls er außerhalb des Körpers liegen sollte, mit demselben starr verbunden denken muß, und hierauf die an diesem einzigen Punkt wirkenden Kräfte nach § 24 zu einer Resultierenden F zusammenfaßt, deren Angriffspunkt nun wieder in der Richtung von F beliebig verlegt werden kann.

Betrachten wir als Beispiel die Anziehung, welche eine starre homogene Kugel nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz durch einen außerhalb derselben gelegenen materiellen Punkt P erfährt. Diese Anziehung ist die Resultierende aus den Kräften, welche der Punkt P auf alle Massenelemente der Kugel ausübt, und deren Richtungen alle durch P gehen. Man verlege daher zunächst alle diese Kräfte nach P und setze sie dort zu einer Resultierenden F zusammen. Das macht sich sehr einfach, wenn man bedenkt, daß die Anziehungskraft von P auf ein Massenelement der Kugel gleich und entgegengesetzt ist der Anziehung des Massenelements auf P; nach § 33 ist daher F gleich und entgegengesetzt der Kraft, welche die im Kugelmittelpunkt vereinigt gedachte Masse der Kugel auf den Punkt P ausübt. Jetzt können wir den Angriffspunkt von F wieder von P in die Kugel hinein verlegen, z. B. in den Mittelpunkt derselben, und erhalten so den Satz, daß die Anziehung, die eine starre homogene Kugel von einem materiellen Punkt erfährt, ebenso groß ist, als ob ihre Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre.

Dieser einfache Satz gilt aber nur für eine starre Kugel, nicht etwa auch für eine flüssige Kugel. Denn bei einer solchen wäre der oben ausgeführte Gedankengang, der mit der nur für starre Körper gültigen Verlegung der Angriffspunkte der einzelnen Kräfte operiert, nicht gestattet. Es ist eben ein wesentlicher Unterschied zwischen den Kräften, die ein Körper ausübt, und den Kräften, die ein Körper erleidet. Die ersteren, falls sie auf einen bestimmten Punkt wirken, lassen sich ohne weiteres zu einer Resultierenden zusammensetzen, einerlei wie der Körper beschaffen ist, die letzteren nur dann, wenn der Körper starr ist.

In der Tat läßt sich die Anziehung, die eine flüssige Kugel durch die Gravitation erleidet, überhaupt nicht in eine einzige Kraft zusammenfassen, die Kugel wird sich vielmehr deformieren (Ebbe und Flut).

Wenn die an dem starren Körper wirkenden Kräfte alle in einer Ebene liegen, so lassen sie sich im allgemeinen ebenfalls zu einer einzigen Resultierenden vereinigen, dadurch, daß man zu-

nächst irgend zwei derselben herausgreift, in ihrem Schnittpunkt die Resultante bildet, und das Verfahren schrittweise weiter fortsetzt. Eine Ausnahme bildet der Fall paralleler Kräfte, den wir daher besonders behandeln müssen.

Wenn unter einer Anzahl von Kräften sich auch nur zwei befinden, deren Richtungen nicht in einer Ebene liegen, so wird das hier geschilderte Verfahren der Zusammensetzung der Kräfte illusorisch, weil die Kräfte nicht an einen gemeinsamen Angriffspunkt verlegt werden können. Für die Erledigung dieses allgemeinsten Falles ist daher eine Erweiterung der Theorie notwendig. Zunächst betrachten wir den einfachen Fall paralleler Kräfte.

§ 79. Parallele Kräfte. Wir machen die durch die Angriffspunkte A und B und durch die Richtung der beiden gegebenen, in gleichem Sinne wirkenden Kräfte F_1 und F_2 bestimmte Ebene zur Zeichnungsebene (Fig. 19). Da die Richtungen von F_1 und F_2 sich nicht schneiden, so führen wir zwei einander gleiche und entgegengesetzte Zusatzkräfte K ein, die in A und B in der Richtung AB angreifen und sich gegenseitig neutralisieren. Dann vereinigt sich in A die Kraft F_1 mit K zu G_1, in B die Kraft F_2 mit K zu

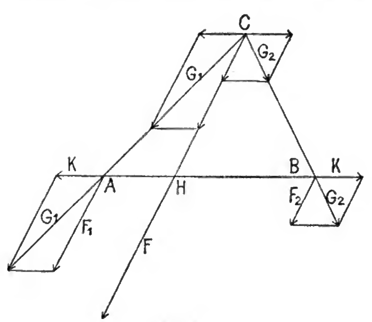


Fig. 19.

G_2, und nunmehr läßt sich die Resultierende aus G_1 und G_2 leicht konstruieren, indem man die Angriffspunkte A und B in den Schnittpunkt C verlegt (s. Fig.). Die Zusammensetzung von G_1 und G_2 geschieht am einfachsten dadurch, daß man zunächst sowohl G_1 als auch G_2 wieder in ihre Komponenten F_1 und K, bzw. F_2 und K zerlegt, was einfach auf eine Verschiebung der Kräfte-

parallelogramme von A und B nach C hinauskommt. Dann heben sich die beiden Kräfte K wieder auf, und es resultiert die Kraft:

$$F = F_1 + F_2, \tag{281}$$

die den Kräften F_1 und F_2 parallel ist und in C angreift, oder auch in irgendeinem anderen Punkte ihrer Richtung, z. B. in dem Schnittpunkt H mit der Geraden AB. Dieser Punkt H ist dadurch vor allen anderen Punkten der Geraden CH ausgezeichnet, daß seine Lage nur von den Größen und den Angriffspunkten der Kräfte F_1 und F_2, nicht aber von deren Richtung abhängt.

Dies ergibt sich, wenn man bedenkt, daß das von den Kräften F_1, K, G_1 gebildete Dreieck (das halbe Kräfteparallelogramm) ähnlich ist dem Dreieck ACH, und daher:

$$AH : HC = K : F_1,$$

ebenso:

$$BH : HC = K : F_2,$$

folglich:

$$F_1 \cdot AH = F_2 \cdot BH, \tag{281a}$$

oder:

$$AH = \frac{F_2}{F_1 + F_2} \cdot AB. \tag{282}$$

Dreht man also die parallelen Kräfte F_1 und F_2 bei unveränderter Größe um ihre Angriffspunkte A und B, so dreht sich die Resultierende F ebenfalls bei unveränderter Größe um ihren Angriffspunkt H.

Für $F_2 = 0$ fällt H mit A zusammen, für $F_2 = F_1$ liegt H in der Mitte von A und B, wie natürlich; immer aber liegt H zwischen A und B.

Für den Übergang zu einer beliebigen Anzahl von parallelen Kräften wollen wir die analytische Behandlung einführen. Seien x_1, y_1, z_1 die Koordinaten von A, x_2, y_2, z_2 die von B, so ist die Gleichung der Geraden AB:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Dann sind die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes H dadurch bestimmt, daß sie erstens die vorstehende Gleichung und zweitens die Gleichung (282) befriedigen, also:

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{AH}{AB} = \frac{F_2}{F_1 + F_2}.$$

Daraus folgt, mit Rücksicht auf (281):

$$\left.\begin{aligned} x_0(F_1+F_2)=x_0F=x_1F_1+x_2F_2\,, \\ y_0(F_1+F_2)=y_0F=y_1F_1+y_2F_2\,, \\ z_0(F_1+F_2)=z_0F=z_1F_1+z_2F_2\,, \end{aligned}\right\} \quad (283)$$

d. h. das Produkt der resultierenden Kraft F in eine Koordinate ihres Angriffspunktes ist gleich der Summe der Produkte der Komponenten in die entsprechende Koordinate ihres Angriffspunktes.

Dieses Resultat läßt sich leicht auf eine beliebige Anzahl paralleler Kräfte verallgemeinern.

Haben wir z. B. drei Kräfte F_1, F_2, F_3, so denken wir uns zunächst F_1 und F_2 zu einer Resultierenden F' vereinigt, deren Größe F_1+F_2 ist und deren Angriffspunkt x_0', y_0', z_0' durch (283) gegeben wird.

Dann ist die gesuchte Kraft F die Resultierende aus F' und F_3, ihre Größe daher nach (281):

$$F=F'+F_3=F_1+F_2+F_3\,,$$

und ihr Angriffspunkt nach (283) dadurch bestimmt, daß das Produkt x_0F gleich ist der Summe von x_3F_3 und $x_0'F'$.

Letzteres Produkt ist aber wiederum nach (283) gleich:

$$x_1F_1+x_2F_2\,,$$

folglich:

$$x_0F=x_1F_1+x_2F_2+x_3F_3\,,$$

und ebenso für die Koordinaten y und z.

So ergibt sich schließlich für eine beliebige Anzahl von parallelen, in gleichem Sinne wirkenden Kräften F_1, F_2, F_3, $\cdots$ mit den Angriffspunkten x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, $\cdots$ für die Größe der resultierenden Kraft:

$$F=\Sigma F_1\,, \tag{284}$$

und für den Ort des Angriffspunktes x_0, y_0, z_0:

$$x_0F=\Sigma x_1F_1\,,\quad y_0F=\Sigma y_1F_1\,,\quad z_0F=\Sigma z_1F_1\,, \tag{285}$$

wobei der Angriffspunkt in der Richtung von F noch beliebig verschoben werden kann.

§ 80. Anwendung auf die Schwere. Als eine besonders wichtige Anwendung der gefundenen Sätze behandeln wir jetzt die Frage nach der Resultierenden aller Kräfte, welche die Erde nach dem Gravitationsgesetz auf einen starren Körper ausübt. Auf ein Massenelement m_1 des Körpers wirkt die Erde mit der Kraft m_1g in der Richtung nach dem Erdmittelpunkt (§ 34). Solange die Dimensionen des Körpers verschwindend klein sind gegen

seine Entfernung vom Erdmittelpunkt, können die Anziehungskräfte auf alle einzelnen Massenelemente m_1, $m_2 \cdots$ des Körpers als parallel betrachtet werden und vereinigen sich zu einer einzigen gleichgerichteten Resultierenden F, deren Größe nach (284) gegeben ist durch:

(286) $$F = g \cdot \Sigma m_1 ,$$

die in dem Punkt x_0, y_0, z_0 angreift, wenn nach (285):

(287) $$x_0 \Sigma m_1 = \Sigma m_1 x_1 , \cdots .$$

Der durch diese Gleichungen bestimmte Punkt x_0, y_0, z_0 heißt der Schwerpunkt des Körpers. Seine Lage hängt nicht von der Richtung der Schwerkraft ab und auch nicht von der Größe der Schwerebeschleunigung g, sondern nur von der Lagerung der Massenelemente im Körper. Daher besitzt er eine viel allgemeinere Bedeutung als die, Angriffspunkt der resultierenden Schwerkraft zu sein, und würde korrekter Massenmittelpunkt genannt werden.

Es erweist sich häufig als zweckmäßig, auch dann von dem Schwerpunkt von Massenelementen zu sprechen, wenn dieselben gar nicht starr miteinander verbunden sind, z. B. von dem Schwerpunkt eines Systems frei beweglicher materieller Punkte mit den Massen $m_1, m_2, \cdots$, indem man sich diesen Schwerpunkt in jedem Augenblick durch die Gleichungen (287) definiert denkt. Dann fällt natürlich die Bedeutung des Schwerpunktes als des Angriffspunktes der resultierenden Schwerkraft ganz fort.

Handelt es sich darum, den Schwerpunkt eines Systems von Körpern zu finden, so ist es häufig zweckmäßig, in (287) die Summation nicht direkt über alle Massenelemente aller Körper zu erstrecken, sondern zunächst für jeden Körper einzeln den Schwerpunkt zu bestimmen, hierauf in diesem Schwerpunkt die Masse des Körpers sich vereinigt zu denken, und dann aus den so erhaltenen Massenpunkten wiederum den Schwerpunkt zu bilden.

Daß dieses Verfahren stets zu dem richtigen Resultat führt, erkennt man am einfachsten, wenn man sich alle Körper starr verbunden und schwer denkt. Denn die resultierende Schwerkraft des ganzen starren Systems wird jedenfalls richtig herauskommen, wenn man zunächst die resultierende Schwerkraft für jeden Körper einzeln bildet und die so entstandenen Kräfte wieder zu einer einzigen Resultierenden vereinigt.

Wenn die Masse eines Körpers stetig im Raum angeordnet ist, so enthält das Volumenelement dV die Masse $k dV$ (§ 31), wo

die Dichtigkeit k von den Koordinaten x, y, z abhängen kann, und die Summen verwandeln sich in Integrale. Dann ergibt sich aus (287) für die Lage des Schwerpunktes:

$$x_0 \int k\,dV = \int k x\,dV, \cdots. \tag{288}$$

Ist speziell der Körper homogen, also k konstant, so fällt k ganz heraus, und es folgt:

$$x_0 \int dV = \int x\,dV, \cdots. \tag{289}$$

In diesem Sinne spricht man auch von dem Schwerpunkt eines Volumens, und ebenso von dem Schwerpunkt einer Fläche oder einer Linie, indem man sich das betreffende geometrische Gebilde homogen mit Masse belegt denkt, deren Dichte dann jedesmal herausfällt.

Berechnen wir als Beispiel die Lage des Schwerpunktes für die Fläche eines Kreissektors vom Radius r und Öffnungswinkel α.

Wir legen den Koordinatenanfangspunkt in den Kreismittelpunkt, die x-Achse in die Halbierungsrichtung des Winkels α. Dann ergibt sich leicht nach dem Muster von (289), mit ϱ und φ als Polarkoordinaten:

$$x_0 \int\int \varrho\,d\varrho\,d\varphi = \int\int \varrho \cos\varphi \cdot \varrho\,d\varrho\,d\varphi$$

und

$$y_0 \int\int \varrho\,d\varrho\,d\varphi = \int\int \varrho \sin\varphi\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi$$

mit den Grenzen 0 und r für ϱ, und $-\frac{\alpha}{2}$ und $+\frac{\alpha}{2}$ für φ.

Daraus:

$$x_0 = \frac{4}{3\alpha} \sin\frac{\alpha}{2} \cdot r, \quad y_0 = 0. \tag{290}$$

Für $\alpha = 2\pi$ haben wir die volle Kreisfläche; dann wird $x_0 = 0$. Für $\alpha = 0$ aber wird $x_0 = \frac{2}{3} r$, entsprechend dem Schwerpunkt einer unendlich schmalen Dreiecksfläche, deren Grundlinie von der Spitze um die Strecke r entfernt ist.

Von dem Schwerpunkt einer Dreiecksfläche wohl zu unterscheiden ist der Schwerpunkt des Dreiecksumfangs, den man am einfachsten nach dem oben entwickelten Satz dadurch findet, daß man zuerst für die einzelnen Seiten die Schwerpunkte nimmt (die

Mittelpunkte der Seiten), und jeden dieser Punkte sich mit der Masse der Seite (gemessen durch ihre Länge) belegt denkt.

§ 81. Antiparallele Kräfte. Betrachten wir nun zwei in den Punkten A und B angreifende Kräfte F_1 und F_2, die in gerade entgegengesetztem Sinne wirken und daher antiparallel genannt werden. Es sei $F_1 > F_2$ (Fig. 20).

Dann ergibt sich die resultierende Kraft am einfachsten folgendermaßen. Wir zerlegen die größere Kraft F_1 in zwei parallele gleichsinnige Kräfte, von denen die eine in B angreift und gleich und entgegengesetzt F_2 ist, während die andere, F, in einem Punkte H auf der anderen Seite von A angreift. Dies ist immer möglich, wenn wir nur dafür sorgen, daß F_1 die Resultante ist aus diesen beiden Kräften, d. h. daß nach (281):

(291) $$F_1 = F + F_2$$

und nach (281a):

(292) $$F \cdot HA = F_2 \cdot BA\,.$$

Fig. 20.

Nun substituieren wir statt der Kraft F_1 deren beide Komponenten F und F_2. Dann heben sich die beiden Kräfte F_2 in B auf, und es bleibt allein als Resultierende übrig die Kraft F, deren Größe nach (291) gegeben ist durch:

(293) $$F = F_1 - F_2\,,$$

deren Richtung mit der der größeren Kraft F_1 übereinstimmt, und deren Angriffspunkt H außerhalb der Strecke AB auf der Seite der größeren Kraft F_1 liegt, und zwar nach (292) in der Entfernung:

(294) $$AH = AB \cdot \frac{F_2}{F}$$

von deren Angriffspunkt A.

Die Gleichungen (293) und (294) können auch als Verallgemeinerungen der für parallele Kräfte abgeleiteten Gleichungen (281) und (282) angesehen werden, da sie aus diesen hervorgehen, wenn F_2 negativ genommen wird. Dann weist zugleich der negative Wert von AH darauf hin, daß H auf der dem Punkt B abgewandten Seite von A liegt.

Je mehr sich die Größe von F_2 der von F_1 nähert, um so weiter rückt H hinaus, und wenn $F_2 = F_1$ ist, wird das zur Bestimmung der resultierenden Kraft eingeschlagene Verfahren illu-

sorisch. Zwei gleiche antiparallele Kräfte lassen sich überhaupt nicht zu einer einzigen resultierenden Kraft vereinigen, sie bilden einen besonderen Krafttypus und werden als **Kräftepaar** bezeichnet.

Haben wir eine beliebig große Anzahl von parallelen und antiparallelen Kräften an einem starren Körper, so lassen sich dieselben im allgemeinen zu einer einzigen resultierenden Kraft vereinigen. Eine einfache Betrachtung auf Grund des für zwei antiparallele Kräfte erhaltenen Resultats zeigt nämlich, daß die Formeln (284) und (285) für die Resultierende eines Systems paralleler Kräfte auch dann anwendbar bleiben, wenn die Kräfte zum Teil in entgegengesetztem Sinne wirken. Man braucht nur diese letzteren Kräfte mit entgegengesetzten Vorzeichen in die Gleichungen einzuführen. Dann ergibt das Vorzeichen der algebraischen Summe aller Kräfte ΣF_1 außer der Größe auch die Richtung der Resultierenden.

Eine Ausnahme bildet jedoch der Fall, daß $\Sigma F_1 = 0$. Dann verlieren nämlich die zur Bestimmung des Angriffspunktes x_0, y_0, z_0 der Resultierenden dienenden Gleichungen (285) ihren Sinn, und das ganze Kräftesystem reduziert sich entweder auf ein Kräftepaar, oder es hält sich im Gleichgewicht.

Wann das eine und wann das andere eintritt, lehrt folgende Betrachtung. Wir fassen zunächst alle Kräfte, die nach der einen Seite wirken: $F_1', F_2', F_3', \cdots$ zu ihrer Resultierenden F' zusammen, sodann die nach der entgegengesetzten Seite wirkenden: $F_1'', F_2'', F_3'' \cdots$ (positiv genommen) zu ihrer Resultierenden F''.

Dann ist nach der Voraussetzung:

$$\Sigma F_1' = \Sigma F_1''. \tag{295}$$

Ferner:

$$\left.\begin{aligned} x_0' \, \Sigma F_1' &= \Sigma x_1' \, F_1', \cdots \\ \text{und: } x_0'' \, \Sigma F_1'' &= \Sigma x_1'' F_1'', \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{296}$$

Nun untersuchen wir, ob die Verbindungslinie der Angriffspunkte der beiden gleichen antiparallelen Resultierenden F' und F'' mit deren Richtung zusammenfällt oder nicht.

Im ersten Fall haben wir Gleichgewicht, im zweiten Fall haben wir ein Kräftepaar. Der erste Fall erfordert die Bedingung:

$$(x_0'' - x_0') : (y_0'' - y_0') : (z_0'' - z_0') = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma ,$$

wenn α, β, γ die Richtungswinkel der Kräfte sind.

Substituiert man hierin die Werte (296), so erhält man, unter Berücksichtigung von (295) und mit Einführung der Bezeichnung F

(positiv oder negativ) für die Größe und Richtung einer Kraft, als notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines Systems paralleler und antiparalleler Kräfte:

$$(297)\quad \begin{cases} \Sigma F_1 = 0 \\ \text{und: } \Sigma x_1 F_1 : \Sigma y_1 F_1 : \Sigma z_1 F_1 = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma . \end{cases}$$

Sind z. B. die Kräfte parallel oder antiparallel der z-Achse, so ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$, und die Gleichgewichtsbedingungen werden:

$$\Sigma F_1 = 0, \quad \Sigma x_1 F_1 = 0, \quad \Sigma y_1 F_1 = 0 .$$

Auf die z-Koordinaten der Angriffspunkte kommt es dabei überhaupt nicht an, wie natürlich, da eine jede Kraft in der Richtung der z-Achse beliebig verschoben werden kann.

§ 82. Kräftepaare. Beschäftigen wir uns jetzt näher mit den Kräftepaaren. Wir machen die Ebene eines aus den beiden antiparallelen Kräften F bestehenden Kräftepaares zur Zeichnungsebene und verschieben den Angriffspunkt der einen Kraft F in ihrer Richtung so weit, daß die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte AB senkrecht steht auf F. Dann heißt AB der Arm des Kräftepaares.

Zunächst ist leicht zu sehen, daß ein Kräftepaar, ohne daß seine physikalische Bedeutung geändert wird, in der Richtung einer der Kräfte beliebig weit verschoben werden kann, z. B. nach $A'B'$ (Fig. 21). Denn was nach § 77 für jede Kraft einzeln gestattet ist, muß auch für beide Kräfte zusammen gelten.

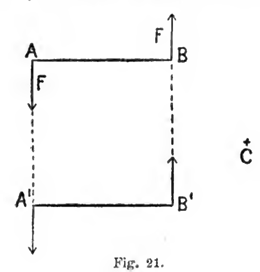


Fig. 21.

Ein einigermaßen naheliegendes Bedenken gegen diesen Satz, sowie dessen Widerlegung, möge in die Form einer kleinen Zwiesprache gekleidet werden.

„Wie können die Kräftepaare AB und $A'B'$ äquivalent sein, da doch eine Drehung des Körpers um die Mitte von AB nicht dasselbe ist wie eine Drehung des Körpers um die Mitte von $A'B'$?"

Gewiß sind die beiden genannten Drehungen nicht identisch. Aber es ist nicht gesagt und auch gar nicht richtig, daß ein Kräftepaar eine Drehung des Körpers um den Mittelpunkt seines Armes bewirkt.

„Aber nach § 76 bewegt sich doch jeder Punkt gemäß der Kraft, die auf ihn wirkt. Folglich bewegen sich, wenn das Kräftepaar in A und B angreift, die Punkte A und B, die ja ursprünglich ruhen, in der Richtung ihrer Kräfte F, und da die Kräfte gleich sind, so ist diese Bewegung eine Drehung um den Mittelpunkt von AB."

Nach § 76 bewegt sich jeder Punkt gemäß der Resultierenden der Kräfte, die von allen übrigen Punkten des Universums auf ihn ausgeübt werden.

Nun haben wir hier nicht zwei isolierte Punkte A und B, sondern einen starren Körper, dem die Punkte A und B angehören. Dieselben stehen also unter dem Einfluß der Kräfte, die von den anderen Punkten des Körpers, namentlich den unmittelbar benachbarten, auf sie ausgeübt werden, und die den Körper zu einem starren machen. Diese inneren Kräfte müssen auch berücksichtigt werden, wenn es sich um die Bewegung der Punkte A und B handelt, und nicht nur die Kräfte F.

„Aber die inneren Kräfte des Körpers können doch unmöglich den Körper in Bewegung setzen, sie halten sich also im Gleichgewicht und können daher weggelassen werden."

Wohl halten sich die inneren Kräfte eines starren Körpers im Gleichgewicht, wenn man sie alle zu einer Resultierenden zusammenfaßt. Das folgt nach § 76 aus dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Aber hier handelt es sich nicht um die Resultierende aller inneren Kräfte des Körpers, sondern um die Resultierende derjenigen inneren Kräfte, welche auf den Punkt A (oder auf den Punkt B) wirken.

Daß diese sich durchaus nicht immer im Gleichgewicht halten, ersieht man am leichtesten aus der Betrachtung irgendeines beliebigen anderen Punktes C des Körpers (Fig. 21).

Wenn der Körper durch das Kräftepaar in Bewegung gesetzt wird, so wird doch auch der Punkt C anfangen sich zu bewegen. Welche Kraft setzt ihn in Bewegung? Doch nur die Resultierende aus den inneren Kräften, die auf ihn wirken, denn das sind die einzigen, denen er ausgesetzt ist. So gut also die inneren Kräfte auf C mit einer endlichen Resultierenden wirken, so gut werden sie es im allgemeinen auch in A und B tun, und aus dieser Resultierenden und F bestimmt sich erst die Bewegung von A und B. Es bleibt also dabei, daß ein Kräftepaar den Körper nicht um den Mittelpunkt seines Armes zu drehen braucht, und daß das

Bedenken hinsichtlich der vollen Äquivalenz der Kräftepaare AB und $A'B'$ unbegründet ist.

„Wie bewegt sich aber denn nun in Wirklichkeit der Körper unter dem Einfluß eines Kräftepaares, wenn er sich nicht um den Mittelpunkt des Armes dreht?“

Diese Frage kann an dieser Stelle noch nicht behandelt werden. Sie wird aber weiter unten (§ 149) ihre vollständige und eindeutige Beantwortung finden. —

Ein Kräftepaar läßt sich aber auch in der Richtung seines Armes AB beliebig verschieben, ohne daß seine Bedeutung geändert wird.

Bringen wir nämlich in den auf der Geraden AB gelegenen Punkten A' und B', wobei $A'B' = AB$, je zwei den ursprünglichen gleiche und entgegengesetzte Kräfte F an, so stören diese das Kräftesystem nicht, weil sie sich paarweise aufheben (Fig. 22). Nun vereinigt sich die Kraft F in A mit der ihr parallelen Kraft F in B' zu einer parallelen Resultierenden $2F$, die im Mittelpunkt O von AB' angreift. Ebenso vereinigen sich die entgegengesetzt parallelen Kräfte in B und A' zu der ihnen parallelen Resultierenden $2F$, die im Mittelpunkt von BA', d. h. auch in O, angreift. Diese beiden Resultierenden heben sich also auf, und es bleibt allein übrig das Kräftepaar in $A'B'$, welches nichts anderes ist als das verschobene ursprüngliche Kräftepaar.

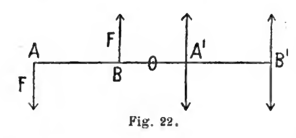


Fig. 22.

Ferner läßt sich auch der Arm des Kräftepaares in der Ebene des Kräftepaares, d. h. in der Zeichnungsebene, beliebig um seinen Mittelpunkt O drehen. Um dies zu zeigen, denken wir uns an dem um einen beliebigen Winkel gedrehten Arm $A'B'$ wiederum je zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte F senkrecht zu $A'B'$ angebracht, welche das Kräftesystem nicht stören (Fig. 23), und vereinigen einerseits die ursprüngliche Kraft in A mit der auf sie zu gerichteten Kraft in A', andererseits die ursprüngliche Kraft in B mit der auf sie zu gerichteten Kraft in B' zu je einer Resultierenden, indem wir die beiden Komponenten jedesmal an ihren Schnittpunkt verlegen (s. Fig.).

Wegen der Gleicheit der Kräfte fallen die Resultierenden in die Richtung der Halbierungslinie des Winkels der beiden Arme, und da sie einander entgegengesetzt gleich sind, heben sie sich

auf. Es bleibt also allein übrig das ursprüngliche Kräftepaar, nur mit gedrehtem Arm. Dreht man den Arm um den Winkel π, so erhält man wieder das alte Kräftepaar.

Somit erhellt, daß man durch sukzessive Parallelverschiebung und Drehung das Kräftepaar an jede beliebige Stelle seiner Ebene bringen kann, ohne daß seine physikalische Bedeutung geändert wird.

Aber man kann noch weiter gehen. Das Kräftepaar läßt sich auch in jede andere parallele Ebene verlegen. Um dies zu zeigen, denken wir uns die Ebene des Kräftepaares horizontal (Fig. 24) in perspektivischer Zeichnung, die Kraft F in A nach vorn, die in B nach hinten. Sodann bringen wir in den gerade vertikal in

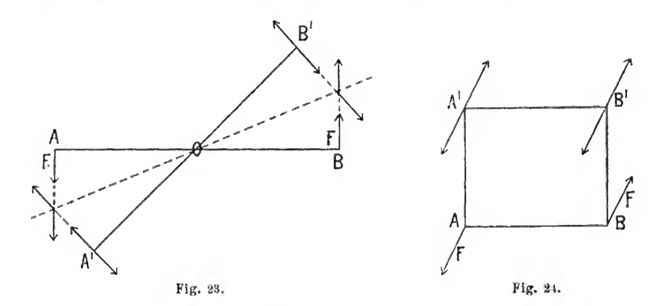


Fig. 23. Fig. 24.

gleicher Höhe über A und B gelegenen Punkten A' und B' wiederum je zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte F an, die keine Störung hervorrufen.

Nun liefert die Kraft in A nach vorn mit der ihr parallelen in B' nach vorn eine Resultierende $2F$, die gleich und entgegengesetzt ist der Resultierenden der Kräfte in B nach hinten und in A' nach hinten, und die auch an dem nämlichen Punkt angreift; denn der Mittelpunkt der Strecke AB' ist auch der Mittelpunkt der Strecke BA'. Folglich bleibt schließlich nur das in die obere Ebene verlegte ursprüngliche Kräftepaar übrig, welches nun in seiner neuen Ebene wieder beliebig verschoben werden kann.

Endlich läßt sich auch die Länge des Armes AB beliebig verändern, ohne daß die Bedeutung des Kräftepaares modifiziert wird. Zerlegen wir nämlich die in B angreifende Kraft F in zwei paral-

lele Komponenten, deren eine, F', in einem beliebigen Punkt B' der Geraden AB angreift, während die andere, $F-F'$, in A angreifen möge (Fig. 25), so können wir an Stelle der Kraft in B ihre beiden Komponenten setzen, falls nach (281a):

$$F' \cdot B'B = (F - F') \cdot AB\,. \tag{298}$$

Dann bleibt übrig in A eine Kraft $F-(F-F') = F'$, und in B' eine gleiche antiparallele Kraft F', also ein Kräftepaar mit der Kraft F' und dem Arm AB', wobei nach (298):

$$F' \cdot AB' = F \cdot AB\,, \tag{299}$$

d. h. das Produkt aus Kraft und Armlänge ist bei dem neuen Kräftepaar das nämliche wie beim alten. Nennen wir dieses Pro-

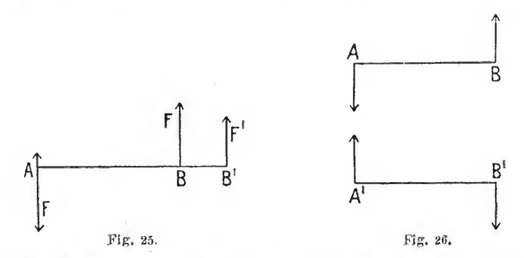


Fig. 25. Fig. 26.

dukt das **Moment** des Kräftepaares, so erhalten wir den Satz, daß zwei in der nämlichen Ebene oder in parallelen Ebenen liegende Kräftepaare mit gleichem Moment identisch sind.

§ 83. Nachdem wir die große Verwandlungsfähigkeit der Kräftepaare kennen gelernt haben, können wir nun auch die Frage beantworten, wodurch ein Kräftepaar überhaupt charakterisiert ist. Nach den vorstehenden Sätzen ist ein Kräftepaar offenbar bestimmt erstens durch sein Moment, zweitens durch die Richtung seiner Ebene und ferner drittens durch seinen Sinn. In der Fig. 26 sind nämlich zwei Kräftepaare gezeichnet, die dasselbe Moment haben und in derselben Ebene liegen, aber doch nicht identisch sind. Denn sie halten sich im Gleichgewicht, sind also gerade entgegengesetzt. Dies nötigt uns, einem Kräftepaar auch einen Richtungssinn beizulegen, und ein solcher bietet sich unmittelbar dar, wenn wir die Drehung ins Auge fassen, die durch die Richtungen der beiden Kraftpfeile angedeutet wird. Um den Drehungs-

sinn eindeutig definieren zu können, wollen wir einer jeden Drehung eine bestimmt gerichtete Drehungsachse zuschreiben, und tun dies ein für allemal durch die Festsetzung, daß eine Drehung eines Koordinatensystems um seinen Anfangspunkt, bei der sich die positive x-Achse gegen die positive y-Achse hin bewegt, die positive z-Achse zur Drehungsachse hat. Die umgekehrte Drehung hat die negative z-Achse zur Drehungsachse. Da wir stets rechtshändige Koordinatensysteme benutzen (§ 16), so ist diese Festsetzung gleichbedeutend mit folgender: Die Drehungsachse eines Uhrzeigers ist die Richtung vom Beschauer zum Zifferblatt, oder: Die Drehungsachse eines sich einbohrenden Korkziehers ist die Richtung, in welcher der Korkzieher im festgehaltenen Kork sich fortbewegt, oder: Die Drehungsachse der Erde ist die Richtung vom Südpol zum Nordpol.

Darnach ist in der Fig. 26 die Achse des Kräftepaares AB von der Zeichnungsebene zum Beschauer, die des Kräftepaares $A'B'$ vom Beschauer zur Zeichnungsebene gerichtet.

Die getroffene Festsetzung ermöglicht es uns, ein Kräftepaar, ebenso wie eine Kraft, durch ein einfaches geometrisches Symbol darzustellen, nämlich durch eine gerichtete Strecke, deren Länge das Moment N, und deren Richtung die Achse des Kräftepaares bezeichnet. Doch wollen wir, um eine Verwechslung mit dem Symbol einer Kraft auszuschließen, die Richtung der Achse durch eine doppelte Pfeilspitze andeuten.

Demnach bedeutet der (vertikale) Doppelpfeil in Fig. 27 dasjenige Kräftepaar, dessen Moment N gleich der Länge des Doppelpfeiles ist, dessen (horizontale) Ebene senkrecht steht auf seiner Richtung, und dessen Achse nach der Doppelspitze gerichtet ist. (Die entsprechenden Kräfte sind perspektivisch punktiert gezeichnet.) Dieses Symbol läßt sich ohne weiteres beliebig verschieben, auch seitwärts, wenn es sich nur gleich und parallel bleibt; der „Angriffspunkt" eines Kräftepaares hat also, im Gegensatz zu dem Angriffspunkt einer Kraft, nicht die mindeste physikalische Bedeutung.

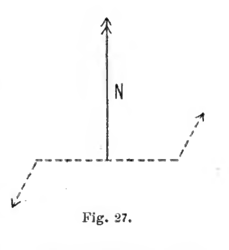


Fig. 27.

§ 84. Zusammensetzung von Kräftepaaren. Die Einführung des beschriebenen Symbols für ein Kräftepaar gestattet

es, die Gesetze, nach denen sich Kräftepaare zusammensetzen, sehr einfach zu formulieren.

Betrachten wir zuerst ein System von beliebig vielen Kräftepaaren N_1, N_2, N_3, $\cdots$ mit parallelen Achsen. Dieselben lassen sich alle in eine einzige Ebene bringen und in dieser an einem gemeinsamen Arm vereinigen. Dann wirken an dem einen Endpunkt des Armes die Kräfte alle in derselben Richtung rechtwinklig zum Arm, setzen sich also dort einfach durch Addition zu einer Resultierenden zusammen, welcher an dem anderen Endpunkte des Armes die gleiche antiparallele Resultierende entspricht. Das Ergebnis ist also ein einziges Kräftepaar, dessen Moment durch das Produkt der Armlänge in die Summe der Einzelkräfte, d. h. durch die Summe aller Momente N_1, N_2, N_3, $\cdots$ dargestellt wird, und dessen Achse die gemeinsame Achse ist. Sind auch antiparallele Kräftepaare dabei, so braucht man nur deren Momente negativ zu nehmen, und erhält dann durch algebraische Addition aller Momente Sinn und Größe des resultierenden Moments.

Nun betrachten wir zwei Kräftepaare N_1 und N_2, deren Achsen einen beliebigen Winkel bilden. Wir vereinigen die Kräftepaare wiederum an einem gemeinsamen Arm AB auf der Geraden, in welcher die Ebenen der beiden Kräftepaare sich schneiden. Die Zeichnungsebene der Fig. 28 legen wir durch den Punkt A und rechtwinklig zum Arm, so daß der andere Endpunkt B des Armes hinter der Zeichnungsebene liegt. Dann liegen die Kräfte F_1 und F_2, die in A angreifen, in der Zeichnungsebene, und die Achsen N_1 und N_2 ebenfalls, und zwar um einen rechten Winkel, in dem gezeichneten Sinne, gegen die Kräfte gedreht. Nun vereinigen sich die Kräfte F_1 und F_2 nach dem Kräfteparallelogramm zur resultierenden Kraft F, welcher in B eine gleiche antiparallele Kraft F entspricht,

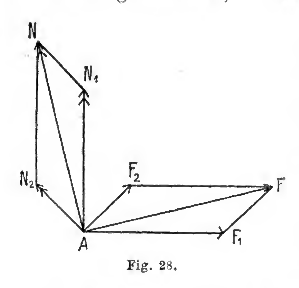


Fig. 28.

und das Ergebnis ist ein Kräftepaar mit dem Moment N, wobei die Richtung $N \perp F$, und das Verhältnis:

$$\frac{N}{F} = \frac{N_1}{F_1} = \frac{N_2}{F_2} = AB.$$

Das von den Strecken N gebildete Viereck ist ein Parallelo-

gramm; denn es ist ähnlich dem Parallelogramm der Kräfte F und gegen dieses um einen rechten Winkel gedreht. Somit haben wir den Satz, daß sich beliebige Kräftepaare, falls man sie durch ihre Symbole charakterisiert, ebenso wie Kräfte nach dem Parallelogramm zusammensetzen und zerlegen, oder mit anderen Worten: Kräftepaare verhalten sich wie Vektoren. Dies veranlaßt uns, zur Bezeichnung eines Kräftepaares den deutschen Buchstaben $\mathfrak{N}$ einzuführen. Der absolute Betrag des Vektors $\mathfrak{N}$ ist das Moment N, seine Richtung ist die Achse des Kräftepaares. Beliebig viele Kräftepaare $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \cdots$ an einem starren Körper setzen sich ganz allgemein durch vektorielle Addition zusammen zu dem resultierenden Kräftepaar:

$$\mathfrak{N} = \Sigma \mathfrak{N}_1, \tag{300}$$

oder, durch die Komponenten ausgedrückt, wenn λ, μ, ν die Richtungswinkel einer Achse bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned} N \cos \lambda &= \Sigma N_1 \cos \lambda_1 = \Sigma \mathfrak{N}_x, \\ N \cos \mu &= \Sigma N_1 \cos \mu_1 = \Sigma \mathfrak{N}_y, \\ N \cos \nu &= \Sigma N_1 \cos \nu_1 = \Sigma \mathfrak{N}_z. \end{aligned}\right\} \tag{301}$$

§ 85. Zusammensetzung beliebiger Kräfte. Die Aufgabe, deren Behandlung wir im § 78 zurückstellen mußten, weil es damals nicht gelang, zwei Kräfte, deren Richtungen sich nicht schneiden, zusammenzusetzen, können wir jetzt wieder aufnehmen, da wir nun gelernt haben, Kräftepaare ganz allgemein zusammenzusetzen, und da es, wie sogleich gezeigt werden soll, mittelst Einführung passender Kräftepaare leicht gelingt, den Angriffspunkt einer Kraft ganz beliebig zu verschieben.

Haben wir nämlich eine Kraft F mit dem Angriffspunkt P (Fig. 29), so bringen wir außerdem in einem beliebigen Punkte O des starren Körpers zwei gleiche Kräfte F an, eine parallele und eine antiparallele, die sich gegenseitig aufheben.

Fig. 29.

Dann haben wir als Resultat erstens die nach O verschobene Kraft F, und zweitens das aus der ursprünglichen Kraft F und der antiparallelen Kraft F in O bestehende Kräftepaar.

Berechnen wir dessen Moment und Achsenrichtung. Die Größe des Moments ist das Produkt von F und der Länge OQ des von O

auf die Richtung der ursprünglichen, durch P gehenden Kraft gefällten Lotes, es wird dargestellt durch die Fläche des Parallelogramms mit den Seiten OP und F.

Diese Größe heißt daher auch „das (statische) Moment der in P angreifenden Kraft F in bezug auf den Punkt O“.

Liegt O in der Kraftrichtung PF, so verschwindet das Moment. Die Achse des Moments ist rechtwinklig zur Ebene OPF und in Fig. 29 vom Bilde zum Beschauer gerichtet.

Jetzt ergibt sich unmittelbar, wie sich beliebige Kräfte mit beliebigen Angriffspunkten zusammensetzen lassen: man verlegt sie alle in der soeben beschriebenen Weise an einen gemeinsamen Angriffspunkt, z. B. den Anfangspunkt der Koordinaten, wo sie sich zu einer Resultierenden vereinigen. Außerdem hat man dann noch die durch die Verlegung entstandenen Kräftepaare, welche sich nach § 84 ebenfalls zu einem einzigen Kräftepaar zusammensetzen.

§ 86. Zur rechnerischen Ausführung dieses Gedankens betrachten wir zunächst die Verschiebung einer Kraft $\mathfrak{F}$ mit dem Angriffspunkt $\mathfrak{r}$ an den Anfangspunkt O, und berechnen die drei Komponenten des dadurch entstehenden Kräftepaares. Denn diese sind es, welche wir nachher bei der Zusammensetzung der verschiedenen Kräftepaare brauchen. Wir bedienen uns dabei zweckmäßigerweise der Fig. 3 (§ 17) und betrachten die drei Komponenten $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ der in P angreifenden Kraft $\mathfrak{F}$ einzeln, zunächst die Komponente $\mathfrak{F}_z$. Diese Komponente läßt sich ohne weiteres von P an den Punkt B der xy-Ebene verlegen, weil BP in der Kraftrichtung liegt. Verschiebt man nun aber $\mathfrak{F}_z$ weiter von B an den Punkt A der x-Achse, so entsteht dabei ein Kräftepaar parallel der yz-Ebene mit dem Moment $AB \cdot \mathfrak{F}_z = y\mathfrak{F}_z$, dessen Achse die positive x-Achse ist, und verschiebt man endlich $\mathfrak{F}_z$ von A nach O, so entsteht dabei ein Kräftepaar parallel der xz-Ebene mit dem Moment $AO \cdot \mathfrak{F}_z = x\mathfrak{F}_z$, dessen Achse die negative y-Achse ist.

Die Verschiebung der beiden anderen Kräftekomponenten $\mathfrak{F}_x$ und $\mathfrak{F}_y$ von P nach O kann man einfach erledigen durch zyklische Vertauschung der Buchstaben in den erhaltenen Resultaten. Darnach ergibt die Verschiebung von $\mathfrak{F}_x$ zwei Kräftepaare mit den Momenten $z\mathfrak{F}_x$ und $y\mathfrak{F}_x$, deren Achsen die positive y-Achse und die negative z-Achse sind, und die Verschiebung von $\mathfrak{F}_y$ zwei Kräftepaare mit den Momenten $x\mathfrak{F}_y$ und $z\mathfrak{F}_y$, deren Achsen die positive z-Achse und die negative x-Achse sind.

Nach (301) setzen sich diese sechs Kräftepaare zu einem einzigen Kräftepaar $\mathfrak{N}$ zusammen, wobei:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{N}_x &= y\mathfrak{F}_z - z\mathfrak{F}_y,\\ \mathfrak{N}_y &= z\mathfrak{F}_x - x\mathfrak{F}_z,\\ \mathfrak{N}_z &= x\mathfrak{F}_y - y\mathfrak{F}_x.\end{aligned}\right\} \quad (302)$$

§ 87. Ein Vektor $\mathfrak{N}$, der sich aus zwei Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ nach (302) zusammensetzt, heißt das (äußere oder) „Vektorprodukt" von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$, im Gegensatz zum (inneren oder) skalaren Produkt $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{F} = x\mathfrak{F}_x + y\mathfrak{F}_y + z\mathfrak{F}_z$ (§ 47), und wird bezeichnet mit:

$$\mathfrak{N} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{F}] = -[\mathfrak{F}, \mathfrak{r}]. \quad (303)$$

Nach § 85 ist der absolute Betrag des Vektorprodukts von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ gleich dem Flächeninhalt des aus den Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ gebildeten Parallelogramms, und seine Richtung die Normale desselben, so zwar, daß die Richtungen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{F}$ oder $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{r}$ ein rechtshändiges System bilden, welches für $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{F}$ auch rechtwinklig ist.

Natürlich lassen sich diese Sätze auch direkt aus (302) ableiten: Daß $\mathfrak{N} \perp \mathfrak{r}$ und $\perp \mathfrak{F}$, erkennt man durch Multiplikation der einzelnen Gleichungen (302) mit den Komponenten von $\mathfrak{r}$ oder mit den Komponenten von $\mathfrak{F}$ und nachfolgender Addition; und für das Quadrat des absoluten Betrages von $\mathfrak{N}$ ergibt sich durch Quadrieren und Addieren von (302):

$$\begin{aligned}&(y\mathfrak{F}_z - z\mathfrak{F}_y)^2 + (z\mathfrak{F}_x - x\mathfrak{F}_z)^2 + (x\mathfrak{F}_y - y\mathfrak{F}_x)^2\\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(\mathfrak{F}_x^2 + \mathfrak{F}_y^2 + \mathfrak{F}_z^2) - (x\mathfrak{F}_x + y\mathfrak{F}_y + z\mathfrak{F}_z)^2 \quad (304)\\ &= \mathfrak{r}^2\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{r}^2\mathfrak{F}^2\cos^2(\mathfrak{r}, \mathfrak{F})\\ &= \mathfrak{r}^2\cdot\mathfrak{F}^2\sin^2(\mathfrak{r}, \mathfrak{F}), \quad (305)\end{aligned}$$

also das Quadrat des Parallelogramms von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$.

Die durch (302) definierten Größen $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{N}_z$ heißen auch die (statischen) Momente der in P angreifenden Kraft $\mathfrak{F}$ in bezug auf die drei Koordinatenachsen. Darnach ist das Moment einer Kraft in bezug auf irgendeine Gerade im Raume gleich dem Produkt der zu dieser Geraden senkrechten Komponente der Kraft in deren Abstand von der Geraden. Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich durch die Überlegung, daß das Moment $\mathfrak{N}_z$ der im Punkte (x, y, z) angreifenden Kraft $(\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z)$ in bezug auf die z-Achse nach (302) gleich ist dem Moment der im Punkt $(x, y, 0)$ angreifenden Kraft $(\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, 0)$ in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt (§ 85).

§ 88. Nunmehr können wir, mit Bezugnahme auf den am Schluß des § 85 geschilderten Gedanken, das Resultat der Zusammensetzung beliebiger Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \cdots$ mit den Angriffspunkten $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \cdots$ direkt anschreiben. Es lautet:

$$(306) \begin{cases} \mathfrak{F} = \Sigma \mathfrak{F}_1, \\ \mathfrak{N} = \Sigma [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{F}_1]. \end{cases}$$

In Worten: Wenn irgendwelche Kräfte an einem starren Körper wirken, so lassen sie sich stets zusammenfassen in eine einzige Kraft $\mathfrak{F}$, die im Anfangspunkt der Koordinaten angreift, verbunden mit einem einzigen Kräftepaar $\mathfrak{N}$, wobei $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ sich aus den gegebenen Kräften nach (306) zusammensetzen. In diesen Gleichungen sind alle bisher abgeleiteten Sätze, auch die über parallele und antiparallele Kräftesysteme, als spezielle Fälle enthalten. Bedenkt man, daß von den beiden Kräften des resultierenden Kräftepaares $\mathfrak{N}$ die eine am Koordinatenanfangspunkt angreifend gedacht werden kann und sich dort mit der resultierenden Kraft $\mathfrak{F}$ zu einer neuen Resultierenden vereinigt, so erhellt, daß der allgemeinste Fall eines Kräftesystems an einem starren Körper sich auch zurückführen läßt auf zwei Kräfte.

Dafür, daß sich ein System von Kräften an einem starren Körper im Gleichgewicht hält, ist hinreichend, aber auch notwendig, daß sowohl die resultierende Kraft $\mathfrak{F}$, als auch das resultierende Kräftepaar $\mathfrak{N}$ verschwindet. Dies ergibt nach (306):

$$(306\,\text{a}) \qquad \Sigma \mathfrak{F}_1 = 0, \quad \Sigma [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{F}_1] = 0.$$

Das sind sechs Bedingungsgleichungen zwischen den Komponenten der Kräfte und den Koordinaten der Angriffspunkte.

§ 89. In der von uns durchgeführten Reduktion eines beliebigen Kräftesystems auf eine einzige Resultierende und ein Kräftepaar ist eine gewisse Willkür insofern enthalten, als der Angriffspunkt der Resultierenden willkürlich gewählt wurde, und es fragt sich, ob und wie das Ergebnis sich ändert, wenn man alle Kräfte, statt nach dem Punkte O, nach einem anderen Punkte O_0 verlegt. Insbesondere würde es von Interesse sein, zu untersuchen, ob man nicht durch passende Wahl des Punktes O_0 ein besonders einfaches Ergebnis bei der Reduktion des Kräftesystems erzielen kann. Diese Frage läßt sich am bequemsten dadurch beantworten, daß wir die Resultierende $\mathfrak{F}$ und das Kräftepaar $\mathfrak{N}$, die ja das ganze Kräftesystem darstellen, direkt vom Angriffspunkt O nach dem Angriffspunkt O_0 verschieben. Dann entsteht durch die Ver-

schiebung von $\mathfrak{F}$ ein neues Kräftepaar $\mathfrak{N}'$, dessen Achse senkrecht steht auf $\mathfrak{F}$ und auf OO_0, und welches sich mit $\mathfrak{N}$ zu einem einzigen Kräftepaar $\mathfrak{N}_0$ vereinigt.

Wir erhalten also in O_0 schließlich die Resultierende $\mathfrak{F}$ und das Kräftepaar $\mathfrak{N}_0$, woraus zunächst hervorgeht, daß die resultierende Kraft $\mathfrak{F}$ eines Kräftesystems ganz unabhängig ist von der Lage ihres Angriffspunktes O_0, während dagegen das dazutretende Kräftepaar von O_0 abhängt. Kann man nun O_0 so wählen, daß $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}$ sich gerade aufheben, also $\mathfrak{N}_0 = 0$ ist? Offenbar im allgemeinen nicht; denn dann müßte $\mathfrak{N}'$ gleich und entgegengesetzt $\mathfrak{N}$ sein, während doch $\mathfrak{N}'$ durch die Bedingung $\mathfrak{N}' \perp \mathfrak{F}$ beschränkt ist, welche für $\mathfrak{N}$ nicht gilt.

Wohl aber läßt sich stets folgende Vereinfachung erzielen. Zerlegt man $\mathfrak{N}$ in eine Komponente $\mathfrak{N}_0 \parallel \mathfrak{F}$ und eine Komponente $\mathfrak{N}_1 \perp \mathfrak{F}$ (Fig. 30), so kann man den neuen Angriffspunkt O_0 so wählen, daß das durch die Verschiebung von $\mathfrak{F}$ nach O_0 entstehende Kräftepaar $\mathfrak{N}' = -\mathfrak{N}_1$.

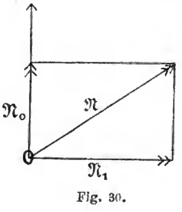


Fig. 30.

Man braucht nur O_0 auf der Normalen der von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ gebildeten Ebene (der Bildebene) anzunehmen (auf der hinteren Seite) und die Strecke $OO_0 = \frac{N_1}{F}$ zu machen.

Dann bleibt in O_0 allein übrig die Kraft $\mathfrak{F}$ und das Kräftepaar $\mathfrak{N}_0$, und wir erhalten den Satz, daß sich **jedes Kräftesystem an einem starren Körper reduzieren läßt auf eine Kraft und ein Kräftepaar, dessen Achse in die Richtung der Kraft fällt.**

Um nun einen bequemen Überblick über die Verhältnisse im allgemeinsten Fall zu gewinnen, denken wir uns zu jedem Punkt O des Körpers die in ihm angreifende Resultierende $\mathfrak{F}$ und das dazu gehörige Kräftepaar $\mathfrak{N}$ konstruiert. Offenbar genügt dann die Betrachtung aller Punkte O einer Ebene $\perp \mathfrak{F}$; denn auf jeder Geraden $\parallel \mathfrak{F}$ ist in allen Punkten $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ das nämliche. Eine solche Ebene wählen wir zur Bildebene der Fig. 31. O_0 sei derjenige Punkt der Ebene, in welchem die Achse des zugehörigen Kräftepaares $\mathfrak{N}_0$ mit $\mathfrak{F}$ zusammenfällt, also wie $\mathfrak{F}$ auf der Ebene senkrecht steht. Die Kraft $\mathfrak{F}$ denken wir uns nach dem Beschauer zugerichtet. Geht man nun zu einem anderen Punkt O der Ebene über, so entsteht durch die Verschiebung der Kraft $\mathfrak{F}$ von O_0 nach O

ein Kräftepaar mit dem Moment $N' = O_0 O \cdot F$, dessen Achse in der Bildebene $\perp O_0 O$ gerichtet ist. Dieses Kräftepaar vereinigt sich mit (dem nicht gezeichneten) $\mathfrak{N}_0$ zu dem resultierenden Kräftepaar $\mathfrak{N}$ in O, dessen Moment:

(307) $$N^2 = N_0^2 + N'^2 = N_0^2 + O_0 O^2 \cdot F^2,$$

und dessen Achse in der Ebene $\perp O_0 O$ liegt, gegen die Bildebene geneigt mit einem Winkel ϑ, dessen Tangente:

(308) $$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{N_0}{N'}.$$

Führt man den Punkt O auf einem Kreise um O_0 herum, so bleiben N', N und ϑ konstant; mit der Vergrößerung des Abstandes OO_0 wachsen aber N' und N unbegrenzt, während zugleich der Winkel ϑ unbegrenzt abnimmt. Gehen wir mit dem Punkte O aus der Bildebene in den Raum hinaus, so bilden alle Punkte O mit einem bestimmten Moment N einen unendlichen Kreiszylinder, dessen Radius mit wachsendem N zugleich ins Unendliche wächst. Die gemeinsame Achse aller dieser Kreiszylinder, der Ort aller Punkte O_0, heißt die Zentralachse des Kräftesystems, für sie besitzt das resultierende Kräftepaar N den kleinsten Wert N_0.

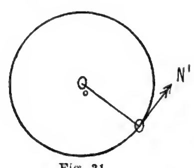


Fig. 31.

§ 90. Außer dem allgemeinsten Fall betrachten wir noch kurz einige wichtige Spezialfälle.

Wenn $N_0 = 0$, so reduziert sich das dem Angriffspunkt O der Kraft $\mathfrak{F}$ entsprechende Kräftepaar $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{N}'$ (Fig. 31). Dann gibt es auf der Zentralachse überhaupt kein Kräftepaar, d. h. das Kräftesystem reduziert sich auf eine Kraft $\mathfrak{F}$, die in einem Punkte der Zentralachse angreift.

Die Bedingung, daß ein Kräftesystem sich auf eine Kraft allein reduziert, ist also nicht etwa die, daß das resultierende Kräftepaar $\mathfrak{N} = 0$ (bei beliebiger Wahl des Koordinatenanfangspunktes O), sondern die, daß $\mathfrak{N} \perp \mathfrak{F}$ oder, nach (306), in vektorieller Schreibweise:

(309) $$\Sigma \mathfrak{F}_1 \cdot \Sigma [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{F}_1] = 0.$$

In der Tat kann man dann immer durch geeignete Wahl des Angriffspunktes der Resultierenden das Kräftepaar $\mathfrak{N}$ zum Verschwinden bringen.

Wenn andererseits $\mathfrak{F}$ verschwindet, so artet die Zentralachse aus. Dann reduziert sich das Kräftesystem auf ein bestimmtes Kräftepaar $\mathfrak{N}$, dessen Angriffspunkt ganz beliebig ist. Dieser Fall findet sich z. B. realisiert bei der Einwirkung des Erdmagnetismus auf einen starren Magneten.

Wenn endlich $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ beide verschwinden, so haben wir Gleichgewicht; auch hier spielt die Wahl des Koordinatenanfangspunktes keine Rolle.

§ 91. Körper mit beschränkter Bewegungsfreiheit. Die Gleichgewichtsbedingungen (306a) beziehen sich auf einen frei beweglichen Körper. Wenn aber der Beweglichkeit des Körpers durch äußere Zwangskräfte gewisse Schranken gesetzt sind, so stellen die Gleichungen (306a) zwar hinreichende, aber keineswegs notwendige Gleichgewichtsbedingungen dar, und es fragt sich, wie in jedem einzelnen Falle die letzteren lauten.

Betrachten wir zuerst einen Körper, in welchem eine Gerade festgehalten wird, unter der Einwirkung eines beliebigen Kräftesystems $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{r}_1, \cdots$; ein solcher stellt den allgemeinsten Typus eines Hebels dar. Dann nehmen wir die feste Gerade etwa zur z-Achse und reduzieren zunächst das Kräftesystem auf die im Koordinatenanfangspunkt angreifende Resultierende $\mathfrak{F}$ und das dazu gehörige Kräftepaar $\mathfrak{N}$. Damit nun Gleichgewicht besteht, braucht $\mathfrak{F}$ nicht $=0$ zu sein; denn auf den Koordinatenanfangspunkt wie auf jeden Punkt der z-Achse wirken Zwangskräfte, welche die auf diese Punkte wirkenden treibenden Kräfte unter allen Umständen neutralisieren.

Was ferner das Kräftepaar $\mathfrak{N}$ betrifft, so kann dessen Komponente $\mathfrak{N}_x$ durch zwei antiparallele in Richtung der y-Achse wirkende Kräfte dargestellt werden, die beide an Punkten der z-Achse angreifen und deshalb durch den äußeren Zwang vernichtet werden, und das gleiche gilt für die Komponente $\mathfrak{N}_y$, deren Kräfte in der Richtung der x-Achse an Punkten der z-Achse angreifend angenommen werden können. Nur die Komponente $\mathfrak{N}_z$ kann durch den Widerstand der z-Achse nicht zerstört werden.

Daher ist es für das Gleichgewicht hinreichend, aber auch notwendig, daß:

$$\mathfrak{N}_z = \Sigma(x_1\mathfrak{F}_{y1} - y_1\mathfrak{F}_{x1}) = 0\,, \tag{310}$$

also eine einzige Gleichung zwischen den Komponenten der treibenden Kräfte und den Koordinaten ihrer Angriffspunkte. Wenn $\mathfrak{N}_z$ von Null verschieden ist, so bewirken die treibenden Kräfte

eine Bewegung, d. h. in diesem Falle eine Drehung des Körpers um die z-Achse. Daher wird das statische Moment $\mathfrak{N}_z$ des Kräftesystems in bezug auf die z-Achse auch das „Drehungsmoment“ um diese Achse genannt.

Während somit von den sechs Gleichungen (306a) für das Gleichgewicht eines freien starren Körpers in dem hier betrachteten Falle nur eine einzige Verwendung findet, so sind die anderen fünf notwendig zur Beantwortung der Frage nach dem Widerstand, den die feste Achse leisten muß, d. h. nach dem Zwang, den man auf sie ausüben muß, damit sie, als frei beweglich betrachtet, in Ruhe bleibt. Dieser Zwang ist offenbar so beschaffen, daß er die Wirkung der treibenden Kräfte nach (306a) gerade aufhebt, er besteht also aus einer im Koordinatenanfangspunkt angreifenden Kraft $-\mathfrak{F}$ und einem Kräftepaar mit den Komponenten $-\mathfrak{N}_x$ und $-\mathfrak{N}_y$.

Ein Kräftepaar mit der z-Achse als Achse vermag der Zwang natürlich nicht zu liefern, da alle Zwangskräfte durch Punkte der z-Achse hindurchgehen. Wie man leicht einsieht, genügt es zur Festhaltung der z-Achse, wenn man irgend zwei Punkte derselben: z. B. den Koordinatenanfangspunkt und noch einen anderen Punkt, festhält.

Daher lassen sich die Zwangskräfte in diesem Falle stets reduzieren auf zwei Kräfte, die in diesen beiden Punkten angreifen.

Wenn der Körper außerdem, daß er sich um die z-Achse drehen kann, auch längs dieser Achse gleiten kann (man denke sich den Körper mit einem glatten festgehaltenen Stift durchbohrt), so genügt (310) nicht für das Gleichgewicht, es muß noch dazu kommen:

$$\Sigma \mathfrak{F}_z = 0 . \tag{311}$$

Denn in diesem Fall vermag die Zwangskraft keine Komponente in der Richtung der z-Achse zu liefern.

Überhaupt ist leicht einzusehen, daß, je freier beweglich der Körper, je geringer der Zwang ist, desto größer die Anzahl der Bedingungsgleichungen sein wird, welche die treibenden Kräfte im Fall des Gleichgewichts erfüllen müssen. Dies führt uns auf eine schon im ersten Teil § 71 bei der Bewegung eines materiellen Punktes gemachte Bemerkung. Ein um eine feste Achse drehbarer starrer Körper besitzt einen einzigen Freiheitsgrad; denn seine Lage wird durch eine einzige Variable, den Drehungswinkel, bestimmt. Dementsprechend genügt auch eine einzige Bedingungs-

gleichung für das Gleichgewicht. Kann der Körper zugleich längs der Drehungsachse gleiten, so kommt ein zweiter Freiheitsgrad dazu und mit ihm eine zweite Gleichgewichtsbedingung. So geht es, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, ganz allgemein weiter.

Wenn der Körper um einen festen Punkt frei drehbar ist, so machen wir diesen Punkt zum Koordinatenanfangspunkt O. Dann wird die in O angreifende Resultierende $\mathfrak{F}$ durch den Zwang aufgehoben, und für das Gleichgewicht ist hinreichend und notwendig die Bedingung:

$$\mathfrak{N} = \Sigma[\mathfrak{r}_1, \mathfrak{F}_1] = 0. \tag{312}$$

Das sind drei Gleichungen zwischen den Komponenten der treibenden Kräfte und den Koordinaten ihrer Angriffspunkte.

Wir werden sehen, daß ein solcher Körper auch drei Freiheitsgrade besitzt. Ist $\mathfrak{N}$ von Null verschieden, so bewirken die treibenden Kräfte eine Drehung des Körpers um O. Daher wird das statische Moment $\mathfrak{N}$ eines Kräftesystems in bezug auf einen Punkt O auch das „Drehungsmoment" der Kräfte um diesen Punkt genannt.

Zweites Kapitel. Statik eines beliebigen Punktsystems.

§ 92. Wir wollen jetzt die Gesetze der Statik eines starren Körpers verallgemeinern auf den Fall eines beliebigen Systems materieller Punkte, und stellen uns zu diesem Zwecke zunächst die Aufgabe, die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Systems von n Massenpunkten anzugeben, auf welche gegebene treibende Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ wirken, und deren Bewegung von vornherein gewissen Beschränkungen unterworfen ist. Diese Beschränkungen denken wir uns dargestellt durch eine gewisse Anzahl p von Gleichungen zwischen den Koordinaten der Punkte. Dann gehört als spezieller Fall hierher sowohl die Statik eines einzigen materiellen Punktes, die wir im ersten Teil behandelt haben, als auch die Statik eines starren Körpers, da ein starrer Körper nichts anderes ist als ein System von Punkten, deren Entfernungen konstant gehalten werden.

Das angenommene System besitzt $3n - p$ Freiheitsgrade; denn von den gesamten $3n$ Koordinaten sind nur $3n - p$ frei veränderlich, die übrigen p sind durch die vorgeschriebenen Bedingungen bestimmt. Die Zahl p kann nicht größer sein als $3n$. Im Grenz-

fall $p=3n$ sind alle Punkte fest, da ihre Lagen schon durch die Bedingungen bestimmt sind; im entgegengesetzten Grenzfall $p=0$ sind alle Punkte frei.

Zur Lösung der gestellten Aufgabe schlagen wir denselben Gedankengang ein, der uns bei einem einzigen materiellen Punkte zum Ziele geführt hat: wir tragen dem physikalischen Einfluß der vorgeschriebenen Bedingungen dadurch Rechnung, daß wir die Zwangskräfte $\mathfrak{Z}$ einführen, welche diesen Einfluß darstellen; denn auf andere Weise als durch Kräfte kann sich derselbe überhaupt nicht äußern. Nach Einführung der Zwangskräfte dürfen wir die Punkte als frei betrachten und erhalten als Gleichgewichtsbedingung des Punktsystems die $3n$ Gleichungen zwischen den Kräftekomponenten:

$$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{Z}_1 = 0\,, \cdots\cdots. \tag{313}$$

Hierbei bedeutet $\mathfrak{Z}_1$ die Resultierende aus den Zwangskräften, die durch alle p Bedingungen an dem Punkt 1 hervorgerufen werden. Wenn speziell eine der Bedingungsgleichungen die Koordinaten des Punktes 1 nicht enthält, so liefert sie natürlich auch keinen Beitrag zu $\mathfrak{Z}_1$.

Die Form (313) der Gleichgewichtsbedingung ist solange unfruchtbar, als man über die Eigenschaften der eingeführten Zwangskräfte nichts Näheres weiß. Sie gewinnt aber einen um so weitergehenden Inhalt, je Bestimmteres man über die Zwangskräfte aussagen kann. Wir suchen jetzt also eine möglichst allgemeine charakteristische Eigenschaft der Zwangskräfte aufzustellen. In der Mechanik eines einzigen materiellen Punktes mit beschränkter Bewegungsfreiheit hatten wir gefunden, daß die Zwangskraft stets senkrecht zur festen Kurve oder festen Fläche wirkt, und daß die Arbeit der Zwangskraft bei jeder eintretenden Bewegung des Punktes verschwindet. In ersterer Form ist der Satz zu einer Verallgemeinerung auf das hier betrachtete Punktsystem nicht geeignet, da die vorgeschriebenen Bedingungen ganz andere sein können als feste Kurven oder Flächen. Wohl aber läßt sich ganz allgemein der Satz ableiten, daß bei irgendeiner Bewegung des Punktsystems unter dem Einfluß beliebiger treibender Kräfte die Arbeit aller Zwangskräfte an allen Punkten zusammengenommen stets gleich Null ist, oder:

$$\Sigma\, \mathfrak{Z}_1 \cdot d\mathfrak{r}_1 = 0\,, \tag{314}$$

wobei $d\mathfrak{r}_1$, wie in (149), die in der Zeit dt vom Punkte 1 zurückgelegte vektorielle Strecke bedeutet.

§ 93. Die Gleichung (314) bildet die Grundlage der ganzen Statik unfreier Punktsysteme. Um sie zu beweisen, müssen wir näher auf die physikalische Bedeutung der p Bedingungsgleichungen für die Punktkoordinaten eingehen, und das können wir nur, wenn wir uns jene Gleichungen auf irgendeine Weise physikalisch realisiert denken. Eine derartige Betrachtung läßt sich durchaus nicht umgehen; denn die Gleichungen an sich können keine Zwangskräfte ausüben, sie haben überhaupt nur dann einen physikalischen Sinn, wenn man sie als den zusammenfassenden Ausdruck für die Wirkungsweise gewisser realer Mechanismen betrachtet.

Wir wollen den Beweis der Gleichung (314) zunächst für einige einfachere Fälle führen. Für einen einzigen Punkt ($n=1$, $p=0$, 1, 2, 3) ist die Gültigkeit jener Gleichung schon ausführlich dargelegt im 6. Kapitel des ersten Teiles (§ 67).

Nehmen wir also jetzt zwei Massenpunkte, und betrachten wir zunächst den speziellen Fall, daß die beiden Punkte durch eine starre massenlose Gerade von der Länge l miteinander verbunden, aber im übrigen frei sind. Dann gilt zwischen den Koordinaten die eine Bedingungsgleichung:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=l^2. \tag{315}$$

Was wissen wir in diesem Falle bei einer beliebigen Bewegung der beiden Punkte, unter dem Einfluß beliebiger treibender Kräfte, von den Zwangskräften $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$, die vermöge der Starrheit der Geraden an den beiden Punkten 1 und 2 angreifen?

Wenn $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ als besondere Kräfte eingeführt werden, so darf man, ohne daß die Bewegung sich ändert, die beiden Punkte als frei betrachten. Man braucht dies aber natürlich nicht zu tun; wenn also die Punkte starr verbunden bleiben, bewegen sie sich unter dem Einfluß der treibenden Kräfte genau in derselben Weise, ob man die Zwangskräfte $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ besonders einführt oder nicht. Daher heben sich diese beiden Kräfte an dem starren System gegenseitig auf, was erfordert, daß sie einander gleich und entgegengesetzt sind und daß ihre Richtungen in die Verbindungslinie der beiden Punkte fallen, also:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}_{x1}&=S\cdot\frac{x_2-x_1}{l}, & \mathfrak{Z}_{x2}&=-S\cdot\frac{x_2-x_1}{l},\\
\mathfrak{Z}_{y1}&=S\cdot\frac{y_2-y_1}{l}, & \mathfrak{Z}_{y2}&=-S\cdot\frac{y_2-y_1}{l},\\
\mathfrak{Z}_{z1}&=S\cdot\frac{z_2-z_1}{l}, & \mathfrak{Z}_{z2}&=-S\cdot\frac{z_2-z_1}{l},
\end{aligned} \tag{316}$$

wo S, die Spannung der starren Geraden, die Größe der Zwangskraft bedeutet, positiv, wenn die Gerade auf Zug, negativ, wenn sie auf Druck beansprucht wird.

Nun ist die Gesamtarbeit der Zwangskräfte nach (316):

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Z}_{x1} dx_1 + \mathfrak{Z}_{y1} dy_1 + \mathfrak{Z}_{z1} dz_1 + \mathfrak{Z}_{x2} dx_2 + \mathfrak{Z}_{y2} dy_2 + \mathfrak{Z}_{z2} dz_2 \\
(317) \quad &= -\frac{S}{l}\Big\{(x_2 - x_1)(dx_2 - dx_1) + (y_2 - y_1)(dy_2 - dy_1) \\
&\qquad + (z_2 - z_1)(dz_2 - dz_1)\Big\},
\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck verschwindet für alle Zeiten, wie man sogleich durch Differentiation von (315) nach der Zeit erkennt.

Jetzt nehmen wir die beiden starr verbundenen Punkte nicht mehr frei an, sondern in ihrer Bewegung noch weiter dadurch beschränkt, daß ein jeder gezwungen ist, auf einer festen Kurve zu bleiben.

Dann behält die Gleichung (314) ihre Gültigkeit. Denn die Gesamtarbeit aller Zwangskräfte ist die Summe der Arbeiten der einzelnen Zwangskräfte, und als solche haben wir hier außer der Spannung der starren Geraden nur noch die Widerstände der festen Kurven, für welche der Satz bereits bewiesen ist.

Ebenso erledigt sich der allgemeinere Fall einer Reihe von Massenpunkten, von denen jeder sich auf einer festen Kurve bewegt und außerdem sowohl mit dem vorhergehenden als auch mit dem folgenden Punkt durch eine starre massenlose Gerade verbunden ist (ausgenommen der erste und der letzte Punkt, die nicht miteinander verbunden sind). Auch hier ist bei jeder eintretenden Bewegung die Gesamtarbeit aller Zwangskräfte gleich Null.

Das zuletzt betrachtete Punktsystem besitzt einen einzigen Freiheitsgrad. Denn die Bewegung des ersten Punktes auf seiner Kurve, welche von einer einzigen Variablen abhängt, bestimmt vollständig die Bewegungen aller anderen Punkte, wie man sogleich erkennt, wenn man, vom ersten Punkte ausgehend, die Lage des zweiten, dritten usw. Punktes aufsucht und bedenkt, daß jeder folgende Punkt außer auf seiner eigenen Kurve auch noch auf einer Kugelfläche liegt, die um den vorhergehenden Punkt mit einem bestimmten Radius, der Länge der Verbindungslinie, beschrieben ist.

§ 94. Nach diesen Vorbereitungen wollen wir den Beweis der Gleichung (314) systematisch führen, zunächst für ein Punktsystem mit einem einzigen Freiheitsgrad.

Der Fall $n = 1$ ist bereits erledigt (ein Massenpunkt auf einer festen Kurve). Der Fall $n = 2$ entspricht zwei Massenpunkten und fünf Bedingungsgleichungen zwischen den sechs Koordinaten.

Damit die Bedingungsgleichungen einen physikalischen Sinn haben, müssen wir sie irgendwie durch einen Mechanismus realisieren, und das kann in folgender Weise geschehen. Eliminieren wir aus den fünf Bedingungsgleichungen die Koordinaten des zweiten Punktes, so erhalten wir für die Koordinaten des ersten Punktes zwei Gleichungen, welche eine feste Kurve darstellen, auf der der Punkt zu bleiben gezwungen ist. Wir denken uns diese Kurve materiell realisiert und den Punkt 1 auf ihr festgehalten (vgl. § 65). Ebenso realisieren wir die aus den Bedingungsgleichungen berechnete feste Kurve für den Punkt 2. Dann kommt es nur noch darauf an, durch einen geeigneten Mechanismus den Punkt 2 zu zwingen, sich auf seiner Kurve in ganz bestimmter, durch die Bedingungsgleichungen vorgeschriebener Weise zu bewegen, wenn der Punkt 1 sich in irgendeiner bekannten Weise bewegt. Würden wir die beiden Punkte starr verbinden, so wäre diese Bedingung viel zu speziell, sie würde also ihren Zweck nicht erfüllen können. Wohl aber führt folgende Konstruktion stets zum Ziele. Wir befestigen an den Massenpunkten 1 und 2 je eine starre massenlose Gerade von der beliebigen, aber nicht zu kleinen Länge l_1 bzw. l_2, und befestigen die anderen Endpunkte dieser beiden Geraden so miteinander, daß sie sich in ihrem Treffpunkt P frei gegeneinander drehen können. Wenn dann die Massenpunkte 1 und 2 sich in einer den fünf Bedingungsgleichungen genügenden Weise bewegen, so kann sich der Punkt P noch auf sehr verschiedenen Kurven bewegen. Unter diesen Kurven greifen wir nun eine ganz beliebige heraus, realisieren sie materiell und zwingen den Punkt P, auf ihr zu bleiben. Dann bilden die drei Punkte 1, P, 2 ein mechanisches System mit einem einzigen Freiheitsgrad nach Art des im vorigen Paragraphen betrachteten, dessen einzige Massenpunkte 1 und 2 den fünf vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen unterworfen sind. Dieses mechanische System stellt also eine materielle Realisierung der gegebenen Bedingungsgleichungen vor und ist ihnen physikalisch vollkommen äquivalent. Wollte man diesen Schluß nicht anerkennen, so dürfte man den Bedingungsgleichungen überhaupt keine bestimmte physikalische Bedeutung beilegen.

Nun wurde schon im vorigen Paragraphen die Gültigkeit der Gleichung (314) für die Zwangskräfte in einem Punktsystem der

betrachteten Art bewiesen; folglich gilt sie auch ganz allgemein für die durch die fünf Gleichungen bedingten Zwangskräfte an den Punkten 1 und 2. Denn was den noch besonders eingeführten Punkt P anbetrifft, so wirken an ihm zwar auch Zwangskräfte, die von seiner festen Kurve und von den starren Geraden l_1 und l_2 herrühren. Aber die Resultierende $\mathfrak{Z}$ derselben und daher auch ihre Arbeit ist nach der Gleichung (217) bei jeder beliebigen Bewegung des Punktes P gleich Null, weil der Punkt P die Masse $m = 0$ besitzt, und weil die an ihm angreifende treibende Kraft $\mathfrak{F} = 0$ ist.

Haben wir den Fall $n = 3$, also drei Massenpunkte mit acht Bedingungsgleichungen zwischen ihren Koordinaten, so realisieren wir diese Gleichungen abermals durch einen Mechanismus der beschriebenen Art, indem wir die Massenpunkte 1, 2, 3 auf festen Kurven laufen lassen und sowohl zwischen 1 und 2, als auch zwischen 2 und 3 je einen Punkt P ebenso wie vorhin einschalten. Dann führen die nämlichen Betrachtungen zu dem nämlichen Ziel, und ebenso erledigt sich der Fall einer beliebigen Anzahl n von Massenpunkten mit einem einzigen Freiheitsgrad.

Es bleibt noch ein Punktsystem mit mehreren Freiheitsgraden zu betrachten. Wenn ein solches System unter der Einwirkung irgendwelcher treibender Kräfte irgendeine Bewegung ausführt, so kann man, die Bewegung als bekannt vorausgesetzt, zu den vorhandenen p Bedingungsgleichungen zwischen den Koordinaten offenbar noch eine beliebige Anzahl von beliebigen Gleichungen zwischen den Koordinaten, die mit der Bewegung verträglich sind, als neue feste Bedingungen hinzufügen, ohne daß die Bewegung gestört wird. Nur spielen die letzteren Bedingungen eine rein formale Rolle, da sie tatsächlich überflüssig sind.

Denkt man sich nun $3n - p - 1$ derartige neue Bedingungen eingeführt, so beträgt die Gesamtzahl der Bedingungen $3n - 1$, und das Punktsystem besitzt einen einzigen Freiheitsgrad, die Gleichung (314) ist also erfüllt für die Gesamtarbeit der von sämtlichen Bedingungen herrührenden Zwangskräfte. Da aber die Zwangskräfte aller neu eingeführten Bedingungen Null sind, so reduziert sich der Ausdruck der Gesamtarbeit auf die Arbeit der von den realen Bedingungen herrührenden Zwangskräfte, und damit ist die Gleichung (314) ganz allgemein bewiesen. Man kann sie in die Worte fassen: Zwangskräfte vermögen zwar im einzelnen, aber niemals im ganzen Arbeit zu leisten oder

Arbeit zu verbrauchen. Dieser Satz hängt innig mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie zusammen; denn solange die beständige Aufrechterhaltung der mechanisch realisiert gedachten festen Bedingungen keinen Aufwand oder Gewinn von Arbeit bedingt, kann auch aus ihrer Wirkungsweise kein Gewinn oder Verbrauch von Arbeit hervorgehen (vgl. hierzu § 75).

§ 95. Auf Grund der Gleichung (314) können wir nun für ein beliebiges Punktsystem ganz die nämlichen Folgerungen wie in § 67 für einen einzelnen Punkt entwickeln. Da es sich hier um denselben Gedankengang handelt wie dort, so wird es genügen, die Resultate auszusprechen. Wenn ein ursprünglich ruhendes System von Massenpunkten, deren Koordinaten durch eine Anzahl vorgeschriebener Bedingungen beschränkt sind, durch die darauf wirkenden treibenden Kräfte in Bewegung gesetzt wird, so bewegt sich jeder einzelne Massenpunkt nach § 76 in der Richtung der Resultierenden aus den auf ihn wirkenden treibenden Kräften $\mathfrak{F}$ und Zwangskräften $\mathfrak{Z}$. Daher ist für die im ersten Zeitelement eintretenden unendlich kleinen Verschiebungen der Punkte:

$$\Sigma(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{Z}_1)\cdot d\mathfrak{r}_1 > 0\,, \tag{318}$$

und mit Rücksicht auf (314):

$$\Sigma\mathfrak{F}_1\cdot d\mathfrak{r}_1 > 0\,, \tag{319}$$

d. h. bei eintretender Bewegung leisten die treibenden Kräfte im ganzen positive Arbeit. Bewegung kann also in einem ruhenden Punktsystem nur dann eintreten, wenn die Punkte eine Verschiebung ausführen können, für welche die Arbeit der treibenden Kräfte positiv ist. Sind die vorgeschriebenen Bedingungen derart, daß den Punkten keine einzige Verschiebung gestattet ist, bei welcher die treibenden Kräfte positive Arbeit leisten, so kann überhaupt keine Bewegung zustande kommen, und das ganze System verharrt in Ruhe, d. h. im Gleichgewicht. Somit erhalten wir als eine für das Gleichgewicht des Punktsystems hinreichende Bedingung die, daß für jede mit den gegebenen Gleichungen verträgliche unendlich kleine Verschiebung der Koordinaten:

$$\Sigma\mathfrak{F}_1\cdot\delta\mathfrak{r}_1 \leqq 0\,. \tag{320}$$

Hier bedeutet $\delta\mathfrak{r}$ eine ganz beliebige unter allen mit den vorgeschriebenen Bedingungen verträglichen Verschiebungen eines Punktes und wird daher auch virtuelle Verschiebung genannt, im Gegensatz zu der im Zeitelement dt eintretenden wirklichen

Verschiebung $d\mathfrak{r}$; dementsprechend heißt die Gleichung (320) das **Prinzip der virtuellen Verschiebungen** oder der **virtuellen Arbeit**. Der Entdecker desselben ist Joh. Bernoulli (1717).

In den hier betrachteten Fällen läßt sich der Ausdruck des Prinzips noch erheblich vereinfachen. Denn da die vorgeschriebenen Bedingungen durch Gleichungen (nicht durch Ungleichungen) zwischen den Koordinaten der Punkte ausgedrückt werden, so ist zu jedem möglichen System von virtuellen Verschiebungen $\delta\mathfrak{r}_1$, $\delta\mathfrak{r}_2, \cdots$ auch das gerade entgegengesetzte System von Verschiebungen $-\delta\mathfrak{r}_1$, $-\delta\mathfrak{r}_2, \cdots$ möglich. Wenn sich nun die Punkte in einer Lage befinden, für welche ein System virtueller Verschiebungen mit negativer Arbeitsleistung möglich ist, so gibt es sicherlich auch ein System virtueller Verschiebungen mit positiver Arbeitsleistung, nämlich das gerade entgegengesetzte, und es kann dann möglicherweise Bewegung in der betreffenden Richtung eintreten. Daher ist das Gleichgewicht nur dann allerseits gesichert, wenn für jedes System virtueller Verschiebungen:

$$\Sigma \mathfrak{F}_1 \cdot \delta\mathfrak{r}_1 = \Sigma \mathfrak{F}_{x1}\delta x_1 + \mathfrak{F}_{y1}\delta y_1 + \mathfrak{F}_{z1}\delta z_1 = 0\,. \tag{321}$$

§ 96. Die Bedeutung des Prinzips der virtuellen Arbeit liegt vor allem darin, daß man, um die Gleichgewichtsbedingungen zu finden, weder auf die Mechanismen, durch welche die vorgeschriebenen Bedingungen realisiert werden, noch auf die von ihnen herrührenden Zwangskräfte irgendwie einzugehen braucht. Es genügt vollständig, alle Arten von Verschiebungen zu kennen, welche die gegebenen Bedingungen den ihnen unterworfenen Punkten gestatten. Ferner besitzt das Prinzip den wichtigen praktischen Vorzug, daß es die Gesamtheit aller Gleichgewichtsbedingungen in einer einzigen Gleichung vereinigt, — eine Leistung, die nur dadurch zustande kommt, daß dies keine gewöhnliche Gleichung ist, sondern eine Variationsgleichung, die nicht für bestimmte, sondern für beliebige Größen gilt. Denn es ist klar, daß der Inhalt einer solchen Variationsgleichung um so reicher, die Bedingungen, die sie fordert, um so weitgehender sind, je willkürlicher man in der Wahl der Variationen, die ihr gehorchen müssen, verfahren darf.

Wenn z. B. die Variationen $\delta\mathfrak{r}_1$, $\delta\mathfrak{r}_2 \cdots$ alle vollständig willkürlich wählbar, d. h. alle Punkte frei sind, so kann (321) nur dann erfüllt sein, wenn:

$$\mathfrak{F}_1 = 0\,, \quad \mathfrak{F}_2 = 0\,, \quad \cdots,$$

denn es steht dann nichts im Wege, alle Variationen aller Koordi-

naten $=0$ anzunehmen, außer einer einzigen, etwa δx_1. Dann bleibt von der ganzen virtuellen Arbeit nur das Glied $\mathfrak{F}_{x1} \cdot \delta x_1$ übrig, und da die virtuelle Arbeit gleich Null sein soll, so muß in dem genannten Produkt der erste Faktor $\mathfrak{F}_{x1}$ verschwinden. So gelangt man durch das Prinzip der virtuellen Arbeit zu den bekannten Gleichgewichtsbedingungen für ein System freier Punkte.

Der entgegengesetzte Grenzfall ist der, daß alle Punkte fest, d. h. ihre Koordinaten schon durch die vorgeschriebenen Bedingungen gegeben sind. Dann sind die zulässigen Verschiebungen $\delta\mathfrak{r}$ alle gleich Null, und die Gleichgewichtsbedingung (321) ist identisch erfüllt für jede beliebige Größe der treibenden Kräfte, so daß unter allen Umständen Gleichgewicht besteht, wie es der Augenschein erfordert.

Im allgemeinen, für eine beliebige Anzahl p von vorgeschriebenen Bedingungen zwischen den $3n$ Punktkoordinaten, also bei einem System von $3n-p$ Freiheitsgraden, gelangt man dadurch von der Variationsgleichung (321) zu den endlichen Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Kräftekomponenten und Punktkoordinaten, daß man zunächst die $3n$ Variationen $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \cdots$ mittelst der p gegebenen Bedingungsgleichungen, die wir mit $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0, \cdots$ bezeichnen wollen, zurückführt auf $3n-p$ beliebig ausgewählte Variationen, die dann voneinander ganz unabhängig sind. Dies geschieht durch Auflösung der p homogenen linearen Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial f}{\partial y_2}\delta y_2+\cdots\cdots=0,\\
\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\delta y_2+\cdots\cdots=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0
\end{array}\right\} \quad (322)$$

nach denjenigen p Variationen, welche von den $3n-p$ übrigen als abhängig betrachtet werden sollen.

Durch Substitution dieser Werte in (321) erhält man dann die virtuelle Arbeit als eine homogene lineare Funktion der $3n-p$ voneinander unabhängigen Variationen, und nach der schon oben für ein System von unabhängigen Variationen angestellten Überlegung erfordert das Verschwinden der virtuellen Arbeit, daß jeder einzelne Koeffizient einer jeden von den übrigen unabhängigen Variation gleich Null ist.

So erhält man ebensoviel Bedingungsgleichungen zwischen den Kräftekomponenten und Punktkoordinaten, als unabhängige Varia-

tionen, d. h. Freiheitsgrade, vorhanden sind, nämlich $3n-p$, und damit ist ein Satz verallgemeinert, den wir schon sowohl bei einem einzigen materiellen Punkt (§ 71) als auch bei einem starren Körper (§ 91) als zutreffend erkannt haben.

§ 97. Die Durchführung der Rechnung auf dem geschilderten direkten Wege führt im allgemeinen zu sehr unübersichtlichen Operationen. Daher ist es von hohem Werte, in dem Lagrangeschen Eliminationsverfahren eine Methode zu besitzen, die zwar auf indirekte, aber auf sehr übersichtliche Weise zum Ziele führt.

Wir multiplizieren nämlich die variierten Bedingungsgleichungen (322) der Reihe nach mit gewissen Größen λ, μ, ν, $\cdots$, deren Wahl wir uns noch vorbehalten, und addieren sie dann zur Gleichung (321). Dann ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung:

$$\sum\left(\mathfrak{F}_{x1}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\cdots\right)\delta x_1=0, \tag{323}$$

zu erstrecken über alle $3n$ Koordinaten, gültig für alle beliebigen virtuellen Verschiebungen und für alle beliebigen Werte der p Größen λ, μ, ν, $\cdots$.

Nun wählen wir diese p Größen so, daß die in Klammern stehenden Koeffizienten der ersten p Variationen, von δx_1 an gerechnet, verschwinden.

Dann reduziert sich die virtuelle Arbeit (323) auf eine lineare homogene Funktion der $3n-p$ übrigen Variationen, und da wir diese als vollständig unabhängig voneinander betrachten dürfen, so erfordert die Variationsgleichung, genau wie oben, daß die Koeffizienten dieser $3n-p$ Variationen einzeln verschwinden.

Das Ganze kommt also schließlich einfach darauf hinaus, daß alle $3n$ Koeffizienten des Ausdrucks (323) gleich Null gesetzt werden:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{F}_{x1}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\cdots=0,\\ \mathfrak{F}_{y1}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y_1}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\nu\frac{\partial\psi}{\partial y_1}+\cdots=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right. \tag{324}$$

für alle Punkte und Koordinaten.

Dies sind in der Tat, nach Elimination von λ, μ, ν, $\cdots$, $3n-p$ Bedingungsgleichungen zwischen den Kräftekomponenten und den Punktkoordinaten, also die gesuchten Gleichgewichtsbedingungen in symmetrischer und übersichtlicher Form.

§ 98. Aus den Gleichgewichtsbedingungen (324) kann man nun durch Vergleichung mit den Gleichgewichtsbedingungen (313)

direkt die Werte für die Größen der Zwangskräfte entnehmen, also z. B. für die x-Komponente der Resultierenden aller Zwangskräfte, die auf den Punkt 1 wirken:

$$\mathfrak{Z}_{x1} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \cdots. \tag{325}$$

Die einzelnen Summanden beziehen sich auf die von den einzelnen Bedingungen ausgehenden Zwangskräfte. Kommt eine Koordinate eines Punktes in einer Bedingungsgleichung gar nicht vor, so liefert die Bedingung auch keine entsprechende Komponente für die auf den Punkt wirkende Zwangskraft.

Fragt man andererseits nach den verschiedenen Zwangskräften, die von einer bestimmten Bedingung, z. B. $f = 0$, auf die verschiedenen Punkte ausgeübt werden, so stehen deren Komponenten in dem Verhältnis:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial y_1} : \frac{\partial f}{\partial z_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial y_2} : \cdots, \tag{326}$$

welches eine Verallgemeinerung des für einen einzigen materiellen Punkt auf einer festen Fläche gültigen Ausdrucks (246) darstellt.

§ 99. Wir wollen jetzt das Prinzip der virtuellen Arbeit auf das Gleichgewicht eines freien oder unfreien starren Körpers anwenden. Zwar haben wir diesen Fall schon oben behandelt, aber einmal ist es stets von Interesse, eine neue Methode auf ein schon anderweitig gelöstes Problem anzuwenden, weil man nur dadurch ihre eigentümlichen Eigenschaften kennen lernt, und außerdem werden wir auf diesem Wege zur Beantwortung einer Reihe von neuen Fragen geführt werden, die uns bei der Behandlung späterer Aufgaben zugute kommen wird.

Ein starrer Körper ist ein System materieller Punkte, deren gegenseitige Entfernungen konstant bleiben; ob die Punkte in endlicher Anzahl vorhanden sind oder ob sie als unendlich kleine Massenelemente einen Raum stetig erfüllen, ist hier gleichgültig.

Wir fragen zunächst nach der Bedingung des Gleichgewichts eines um eine f e s t e A c h s e drehbaren starren Körpers, auf den in bestimmten Angriffspunkten bestimmte treibende Kräfte wirken.

Wollte man die Bedingungsgleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\cdots$ alle hinschreiben und die oben beschriebene L a g r a n g e sche Methode anwenden, so würde man auf sehr lange Rechnungen geführt. Viel bequemer ist es, das im § 96 zuerst geschilderte Verfahren anzuwenden und die Variationen sämtlicher Punktkoordinaten direkt

zurückzuführen auf soviele unabhängige Variationen, als Grade von Bewegungsfreiheit vorhanden sind.

Nun hat ein starrer Körper mit einer festen Achse offenbar nur einen einzigen Grad von Bewegungsfreiheit. Denn seine Lage ist bestimmt, wenn man den Winkel kennt, welchen eine bestimmte durch die Drehungsachse gelegte im Körper festliegende Ebene mit einer ebenfalls durch die Drehungsachse gelegten im Raume ruhenden Ebene bildet.

Daher müssen sich sämtliche virtuellen Verschiebungen durch eine einzige Variation, nämlich durch den unendlich kleinen Drehungswinkel ausdrücken lassen.

Dies geschieht am einfachsten mittelst Einführung von Zylinderkoordinaten: ϱ, φ, z, indem wir wie früher die Drehungsachse zur z-Achse machen.

Dann ist für einen Punkt des starren Körpers:

$$x_1 = \varrho_1 \cos\varphi_1\,, \qquad y_1 = \varrho_1 \sin\varphi_1\,, \qquad z_1 = z_1$$

und die Variationen der Koordinaten, da ϱ_1 und z_1 bei der Drehung des Körpers um die z-Achse konstant bleiben:

$$(326\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} \delta x_1 = -\varrho_1 \sin\varphi_1 \delta\varphi_1\,, \\ \delta y_1 = \varrho_1 \cos\varphi_1 \delta\varphi_1\,, \\ \delta z_1 = 0\,. \end{cases}$$

Nun ist $\delta\varphi_1$ für alle Punkte des Körpers gleich groß, nämlich gleich dem Drehungswinkel, den wir mit ζ bezeichnen wollen, folglich:

$$(326\,\mathrm{b})\qquad \delta x_1 = -y_1\cdot\zeta\,, \qquad \delta y_1 = x_1\cdot\zeta\,, \qquad \delta z_1 = 0\,,$$

und diese Werte in (321) eingesetzt, ergeben die bei einer unendlich kleinen Drehung des Körpers um den Winkel ζ von den treibenden Kräften geleistete Arbeit:

$$(327)\qquad \zeta\cdot\Sigma(x_1\mathfrak{F}_{y1} - y_1\mathfrak{F}_{x1}) = \zeta\cdot\mathfrak{N}_z\,.$$

Das ist nach § 91 das Produkt aus dem Drehungswinkel und dem Drehungsmoment der treibenden Kräfte um die z-Achse. Wenn die treibenden Kräfte den ursprünglich ruhenden Körper in Bewegung setzen, so ist nach (319) die Arbeit der treibenden Kräfte positiv, d. h. die Drehung erfolgt im Sinne des Drehungsmoments.

Wenn also das Drehungsmoment Null ist, so vermögen die treibenden Kräfte keine positive Arbeit zu leisten, und der Körper muß in Ruhe bleiben. So erhalten wir als Gleichgewichtsbedingung wieder die Gleichung (310), aber auf formal viel einfacherem Wege als früher.

Wenn der Körper auch längs der Drehungsachse gleiten kann (vgl. § 91), so ist seine Verschiebung eine allgemeinere, von zwei Variationen abhängige: dem Drehungswinkel ζ und der allen Punkten des Körpers gemeinsamen Gleitungsstrecke w, entsprechend zwei Graden von Bewegungsfreiheit. Die Variationen der Punktkoordinaten werden dann:

$$\delta x_1 = -y_1 \cdot \zeta, \quad \delta y_1 = x_1 \cdot \zeta, \quad \delta z_1 = w,$$

und das Prinzip der virtuellen Arbeit (321) liefert:

$$\zeta \cdot \Sigma(x_1 \mathfrak{F}_{y1} - y_1 \mathfrak{F}_{x1}) + w \cdot \Sigma \mathfrak{F}_{z1} = 0 \tag{328}$$

und folglich, da ζ und w voneinander unabhängig sind, die beiden Gleichgewichtsbedingungen (310) und (311).

§ 100. Jetzt nehmen wir in dem starren Körper nur einen einzigen Punkt als festgehalten an, um den der Körper frei drehbar ist, und fragen zunächst nach der Anzahl der Freiheitsgrade dieses Systems. Um die Lage des Körpers zu charakterisieren, genügt es nicht, die Lage eines seiner beweglichen Punkte anzugeben; daher führen wir, wie in § 56, ein zweites rechtwinkliges und rechtshändiges Koordinatensystem x', y', z' ein, das im Körper festliegt und mit ihm zusammen sich bewegen kann. Den Anfangspunkt lassen wir mit dem im festen Punkt liegenden Anfangspunkt des ruhenden Koordinatensystems x, y, z zusammenfallen. Dann ist die Lage des Körpers durch die Lage des „gestrichenen" Systems bestimmt, und hängt also nur von den neun Richtungscos $\alpha_1, \cdots \gamma_3$ (§ 56) ab.

In der Tat sind in den Transformationsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned}\right\} \tag{329}$$

die gestrichenen Koordinaten für einen bestimmten materiellen Punkt des Körpers unabhängig von der Körperlage, und daher die Variationen der ungestrichenen Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= x' \delta \alpha_1 + y' \delta \alpha_2 + z' \delta \alpha_3, \\ \delta y &= x' \delta \beta_1 + y' \delta \beta_2 + z' \delta \beta_3, \\ \delta z &= x' \delta \gamma_1 + y' \delta \gamma_2 + z' \delta \gamma_3. \end{aligned}\right\} \tag{330}$$

Aber die Variationen der Richtungscos stellen noch nicht die unabhängigen Variationen dar; denn sie sind, ebenso wie die Richtungscos selber, durch eine Reihe von Relationen aneinander geknüpft.

Zunächst hat man nach (32):

$$(331)\quad \begin{cases} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1\,, \\ \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1\,, \\ \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1\,, \end{cases}$$

und außerdem, da die gestrichenen Achsen ein rechtwinkliges System bilden, nach (37):

$$(332)\quad \begin{cases} \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0\,, \\ \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0\,, \\ \alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0\,. \end{cases}$$

Das sind im ganzen sechs Relationen, aus denen hervorgeht, daß von den neun Richtungscos nur drei willkürlich wählbar und die anderen sechs durch sie bestimmt sind. Der bewegliche Körper besitzt also drei Freiheitsgrade, und dementsprechend sind drei Bedingungen für das Gleichgewicht zu erwarten. Um sie zu finden, haben wir die Koordinatenvariationen (330) auf drei unabhängige, allen Punkten des Körpers gemeinsame Variationen zurückzuführen.

Nun würde es unzweckmäßig sein, von den neun Variationen $\delta\alpha_1, \cdots$ irgend drei willkürlich als unabhängig herauszugreifen, weil dadurch die Symmetrie der Gleichungen gestört würde. Wir verfahren besser indirekt, indem wir zunächst in (330) die gestrichenen Koordinaten wieder durch die ungestrichenen ersetzen, nach den Gleichungen (181). Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta x &= (\alpha_1\delta\alpha_1+\alpha_2\delta\alpha_2+\alpha_3\delta\alpha_3)x+(\beta_1\delta\alpha_1+\beta_2\delta\alpha_2+\beta_3\delta\alpha_3)y \\ &\qquad +(\gamma_1\delta\alpha_1+\gamma_2\delta\alpha_2+\gamma_3\delta\alpha_3)z\,, \\ \delta y &= (\alpha_1\delta\beta_1+\alpha_2\delta\beta_2+\alpha_3\delta\beta_3)x+(\beta_1\delta\beta_1+\beta_2\delta\beta_2+\beta_3\delta\beta_3)y \\ &\qquad +(\gamma_1\delta\beta_1+\gamma_2\delta\beta_2+\gamma_3\delta\beta_3)z\,, \\ \delta z &= (\alpha_1\delta\gamma_1+\alpha_2\delta\gamma_2+\alpha_3\delta\gamma_3)x+(\beta_1\delta\gamma_1+\beta_2\delta\gamma_2+\beta_3\delta\gamma_3)y \\ &\qquad +(\gamma_1\delta\gamma_1+\gamma_2\delta\gamma_2+\gamma_3\delta\gamma_3)z\,. \end{aligned}$$

Hier ergeben sich nun auf Grund der zwischen den Richtungscos und ihren Variationen bestehenden Relationen erhebliche Vereinfachungen.

Zunächst ist nämlich leicht auf geometrischem Wege einzusehen, daß die Relationen (331) und (332) ihre Gültigkeit behalten, wenn man in ihnen die Ziffern 1, 2, 3 mit den Buchstaben α, β, γ, d. h. die gestrichenen Koordinatenachsen mit den ungestrichenen, vertauscht. Dann folgen die analogen Beziehungen:

$$(333)\quad \begin{cases} \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1\,, \\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1\,, \\ \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1 \end{cases}$$

und:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3&=0\,,\\ \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3&=0\,,\\ \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3&=0\,,\end{aligned}\right\}\quad(334)$$

welche natürlich nichts wesentlich Neues liefern, sondern in (331) und (332) schon mit enthalten sind. Durch Variation derselben ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1\,\delta\alpha_1+\alpha_2\,\delta\alpha_2+\alpha_3\,\delta\alpha_3&=0\,,\\ \beta_1\,\delta\beta_1+\beta_2\,\delta\beta_2+\beta_3\,\delta\beta_3&=0\,,\\ \gamma_1\,\delta\gamma_1+\gamma_2\,\delta\gamma_2+\gamma_3\,\delta\gamma_3&=0\end{aligned}\right\}\quad(335)$$

und:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1\,\delta\beta_1+\alpha_2\,\delta\beta_2+\alpha_3\,\delta\beta_3&=-(\beta_1\,\delta\alpha_1+\beta_2\,\delta\alpha_2+\beta_3\,\delta\alpha_3)=\zeta\,,\\ \beta_1\delta\gamma_1+\beta_2\delta\gamma_2+\beta_3\delta\gamma_3&=-(\gamma_1\,\delta\beta_1+\gamma_2\,\delta\beta_2+\gamma_3\,\delta\beta_3)=\xi\,,\\ \gamma_1\delta\alpha_1+\gamma_2\delta\alpha_2+\gamma_3\delta\alpha_3&=-(\alpha_1\,\delta\gamma_1+\alpha_2\delta\gamma_2+\alpha_3\,\delta\gamma_3)=\eta\,,\end{aligned}\right\}\quad(336)$$

wenn wir zur Abkürzung die unendlich kleinen Größen ξ, η, ζ einführen, die in der Bezeichnung den Buchstaben α, β, γ bzw. den ungestrichenen Koordinaten x, y, z entsprechen.

Dann lauten die obigen Ausdrücke für die Koordinatenvariationen einfach:

$$\left.\begin{aligned}\delta x&=\eta z-\zeta y\,,\\ \delta y&=\zeta x-\xi z\,,\\ \delta z&=\xi y-\eta x\end{aligned}\right\}\quad(337)$$

und erscheinen in dieser Form tatsächlich zurückgeführt auf drei voneinander unabhängige, allen Punkten des Körpers gemeinsame Variationsgrößen ξ, η, ζ.

Durch Substitution in (321) ergibt sich die virtuelle Arbeit (321) der treibenden Kräfte, mit Benutzung der Abkürzung (306):

$$\xi\cdot\mathfrak{N}_x+\eta\cdot\mathfrak{N}_y+\zeta\cdot\mathfrak{N}_z\,,\quad(338)$$

und die Bedingung des Gleichgewichts ist das Verschwinden aller drei Komponenten von $\mathfrak{N}$, wie in (312).

§ 101. Die Gleichungen (337) für die allgemeinste Verschiebung der Punkte eines starren Körpers mit festem Koordinatenanfangspunkt lassen sich nach (303) auch in Vektorform schreiben:

$$\delta\mathfrak{r}=[\mathfrak{o},\mathfrak{r}]\,,\quad(339)$$

wenn wir unter $\mathfrak{o}$ denjenigen Vektor verstehen, dessen Komponenten die unendlich kleinen Größen ξ, η, ζ sind. Bei der Einfachheit dieser Formel liegt die Vermutung nahe, daß der Vektor $\mathfrak{o}$ eine wichtige kinematische Bedeutung besitzt; wir wollen dieselbe jetzt näher untersuchen.

Für den speziellen Fall $\xi = 0$, $\eta = 0$ gehen die Gleichungen (337) über in:

(340) $$\delta x = -\zeta y\,, \quad \delta y = \zeta x\,, \quad \delta z = 0\,.$$

Das sind genau die Ausdrücke (326 b) der Koordinatenvariationen für eine Drehung eines starren Körpers um die z-Achse, und zwar um den unendlich kleinen Winkel ζ. Ebenso stellen die Gleichungen:

(341) $$\delta x = 0\,, \quad \delta y = -\xi z\,, \quad \delta z = \xi y\,,$$

(342) $$\delta x = \eta z\,, \quad \delta y = 0\,, \quad \delta z = -\eta x$$

Drehungen des Körpers um die x- bzw. y-Achse dar, um die unendlich kleinen Winkel ξ bzw. η.

Nun läßt sich leicht einsehen, daß man die allgemeinste Verschiebung (337) erhält, wenn man die Variationen (340), (341) und (342) für jede einzelne Koordinate addiert, d. h. wenn man den Körper den drei genannten Drehungen nacheinander, in beliebiger Reihenfolge, unterwirft. Allerdings muß man dabei beachten, daß, wenn die erste Drehung, etwa um die z-Achse, vollzogen ist, der ursprünglich in der Lage x, y, z befindliche materielle Punkt nunmehr die Koordinaten $x - \zeta y$, $y + \zeta x$, z besitzt, und daß daher diese Werte, und nicht die Werte x, y, z in die Gleichungen (341) für die zweite Drehung einzusetzen sind, wenn man erfahren will, an welche Stelle des Raumes der ursprünglich in x, y, z befindliche materielle Punkt durch die drei hintereinander ausgeführten Drehungen schließlich gelangt. Allein man überzeugt sich durch die Ausführung der Berechnung unmittelbar, daß der durch die Vernachlässigung des genannten Umstands bedingte Fehler von kleinerer Größenordnung ist. Denn die genaueren Gleichungen lauten für die beiden ersten Drehungen zusammen:

$$\delta x = -\zeta y\,, \quad \delta y = \zeta x - \xi z\,, \quad \delta z = \xi (y + \zeta x)\,.$$

Hier ist das Glied mit $\xi\zeta$ von zweiter Ordnung unendlich klein und daher zu vernachlässigen. Das Entsprechende gilt für die Ausführung der dritten Drehung.

Immerhin ersieht man aus dieser Betrachtung, daß bei endlichen Drehungswinkeln das Resultat der nacheinander ausgeführten Drehungen nicht mehr unabhängig sein würde von der Reihenfolge, in der die Drehungen ausgeführt werden. Es ist dies ein spezieller Fall des allgemeinen Gesetzes von der ungestörten Superposition unendlich kleiner Vorgänge, welches in letzter Linie auf den mathematischen Satz hinauskommt, daß eine Funktion von

mehreren Variablen, solange dieselben unendlich klein sind, eine lineäre Funktion ist.

Wenn wir nun die Endlage ins Auge fassen, die der Körper nach den drei Drehungen ξ, η, ζ einnimmt, so erhalten wir von ihr eine sehr einfache Anschauung, wenn wir die Verschiebung berechnen, die ein materieller Punkt, der sich ursprünglich auf der Geraden:

$$x : y : z = \xi : \eta : \zeta \tag{343}$$

befand, im ganzen erlitten hat. Diese Gerade geht durch den Koordinatenanfangspunkt und besitzt im allgemeinen endliche Richtungswinkel mit den Koordinatenachsen. Die Gleichungen (337) ergeben hierfür:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0,$$

d. h. der Punkt befindet sich am Schluß in der nämlichen Lage wie am Anfang. Daher stellt die gesamte Verschiebung ξ, η, ζ einfach eine Drehung des Körpers um die Gerade (343) vor, und wir erhalten den Satz, daß die allgemeinste unendlich kleine Verschiebung eines starren Körpers mit festem Punkt eine Drehung ist um eine durch diesen Punkt gehende Gerade. Natürlich ist sowohl die Richtung der Geraden als auch die Größe des dazu gehörigen Drehungswinkels vollkommen bestimmt durch die Größen ξ, η, ζ, und zwar ist nach (343) die Richtung der Geraden die Richtung des Vektors $\mathfrak{o}$. Die Größe des Drehungswinkels ergibt sich, wenn man die Größe der Verschiebung:

$$|\delta \mathfrak{r}| = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$$

aus (337) entnimmt und mit der Entfernung des Punktes x, y, z von der Drehungsachse:

$$r \cdot \sin(\mathfrak{r}, \mathfrak{o})$$

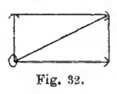
dividiert. Die Rechnung ergibt dann, genau wie in (304) und (305), für den Drehungswinkel den Wert:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

also den absoluten Betrag $|\mathfrak{o}|$ des Vektors $\mathfrak{o}$. Man sagt daher auch: „die drei Rotationen ξ, η, ζ setzen sich nach Größe und Richtung zu einer einzigen resultierenden Rotation zusammen gemäß dem Gesetz des Kräfteparallelepipeds". Dies hat aber natürlich nur den Sinn, daß die Rotationen, nacheinander in beliebiger Reihenfolge ausgeführt, eine Endlage des Körpers ergeben, die auch herbeigeführt werden kann durch eine einzige Rotation mit den

bezeichneten Merkmalen. Denn von Kräftewirkungen ist bei allen diesen Betrachtungen überhaupt nicht die Rede.

Nach diesen Sätzen kann man eine unendlich kleine Rotation und die Zusammensetzung mehrerer solcher Rotationen graphisch vollständig symbolisieren durch eine vom festen Punkt O ausgehende gerichtete Strecke, deren Länge die Größe des Rotationswinkels angibt, in einem geeigneten Maßstabe, und deren Richtung die Rotationsachse bezeichnet in dem § 83 definierten Sinne. Den Endpunkt der Strecke kann man, zur Unterscheidung von dem Symbol einer Kraft, anstatt durch eine Pfeilspitze, durch ein rundes Häkchen markieren (Fig. 32). Mit diesen Symbolen läßt sich nun genau so operieren wie mit denen von Kräften, insbesondere setzen sich mehrere Rotationen um eine gemeinsame Achse auch einfach durch algebraische Addition der Drehungswinkel zu einer resultierenden Rotation zusammen, wie man unmittelbar erkennt, wenn man die Rotationen nacheinander ausgeführt denkt.


Fig. 32.

Hieraus ergibt sich nun auch sogleich die Antwort auf die Frage, welche Endlage der Körper einnimmt, wenn er einer beliebigen Anzahl von gegebenen (unendlich kleinen) Rotationen hintereinander unterworfen wird. Sind $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \mathfrak{o}_3, \cdots$ die einzelnen gegebenen Rotationen, so ist das Endresultat eine einzige Rotation:

$$\mathfrak{o} = \Sigma \mathfrak{o}_1 , \tag{344}$$

genau wie in Gleichung (67).

Die Bedingung, daß die Endlage des Körpers mit seiner Anfangslage übereinstimmt, oder daß alle Rotationen sich gegenseitig aufheben, ist $\mathfrak{o} = 0$.

§ 102. Alle im vorigen Paragraphen abgeleiteten Sätze beziehen sich auf einen starren Körper mit einem festen Punkt; daher gehen die Achsen aller bisher betrachteten Rotationen durch diesen einen Punkt hindurch. Es liegt aber nun die Frage nahe, wie sich unendlich kleine Rotationen zusammensetzen, deren Achsen sich nicht schneiden. Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir uns natürlich von jetzt an den starren Körper vollkommen frei denken.

Hier offenbart sich nun der eigentümliche Vorteil der von uns im vorigen Kapitel bei der Zusammensetzung von Kräften benutzten Methode. Denn obwohl hier gar nicht von Kräften, sondern nur von Verschiebungen die Rede ist, so läuft doch formal genommen das hier zu behandelnde Problem genau auf das dortige

hinaus, was sich in der vollkommenen Übereinstimmung sowohl der Ausgangspunkte als auch der für die Lösung zu benutzenden Hilfsmittel zu erkennen gibt.

Zunächst ist klar, daß das Symbol einer Rotation (Fig. 32), ohne daß seine kinematische Bedeutung eine andere wird, sich beliebig in seiner eigenen Richtung verschieben läßt, sofern nur der Anfangspunkt der Strecke auf der Drehungsachse bleibt. Das entspricht genau der Verlegung des Angriffspunktes einer Kraft in der Richtung der Kraft. Dagegen läßt sich der Anfangspunkt der Strecke nicht seitlich verschieben; denn Rotationen um parallele Achsen sind niemals identisch, ebensowenig wie parallele Kräfte identisch sind.

Bedenken wir nun, daß wir für die ganze Entwicklung der Theorie der Kräfte an einem starren Körper, in den §§ 78 bis 90, keine anderen Grundlagen benutzt haben als diejenigen, welche auch für unendlich kleine Rotationen gelten, so erhellt sogleich, daß wir hier für die Drehungen auf dem nämlichen Wege wieder zu dem nämlichen Resultat kommen müssen wie dort für die Kräfte, und daß es infolgedessen vollkommen genügt, die Resultate direkt anzuführen und im übrigen auf die früheren Darlegungen zu verweisen. Somit dürfen wir ohne weiteres folgende Sätze aussprechen, die sich selbstverständlich sämtlich nur auf unendlich kleine Rotationen beziehen.

Rotationen um parallele Achsen setzen sich, falls sie in gleichem Sinne erfolgen, mit Addition der Drehungswinkel zu einer einzigen Rotation um eine ihnen parallele Achse zusammen. Falls aber auch entgegengesetzt gerichtete (antiparallele) Rotationen vorkommen, so resultiert im allgemeinen ebenfalls eine einzige Rotation, mit algebraischer Summation der Drehungswinkel. Eine Ausnahme bildet jedoch der Fall, daß die algebraische Summe der Drehungswinkel gleich Null ist. Dann heben sich die Rotationen entweder alle gegenseitig auf, oder, allgemeiner, es bleiben zwei gleiche antiparallele Rotationen übrig, die als „Rotationspaar“ bezeichnet werden (§ 81). Ein Rotationspaar stellt also eine Verschiebung des Körpers dar, welche nicht als Drehung aufgefaßt werden kann. Es ist ein Vektor $\mathfrak{q}$, dessen absoluter Betrag gleich ist dem „Moment“ des Rotationspaares, d. h. dem Produkt des Drehungswinkels und des Abstandes der beiden Drehungsachsen, und dessen Richtung senkrecht steht auf der durch dieselben bestimmten Ebene des Rotationspaares, in dem durch die beiden

Rotationsrichtungen bedingten Sinne. Dieser Vektor kann symbolisiert werden durch eine an einem Endpunkt mit einem Doppelhäkchen versehene Strecke, wie in Fig. 33., wo auch die beiden dadurch bezeichneten Rotationen perspektivisch punktiert gezeichnet sind. Im Gegensatz zu dem Symbol einer einfachen Rotation kann dasjenige eines Rotationspaares auch seitlich beliebig verschoben werden, ohne daß seine kinematische Bedeutung sich ändert (§ 83). Unterwirft man den Körper verschiedenen ganz beliebigen Rotationspaaren $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \cdots$, so resultiert stets wieder ein Rotationspaar $\mathfrak{q}$, und zwar einfach durch vektorielle Addition (§ 84):

$$\mathfrak{q} = \Sigma \mathfrak{q}_1 . \tag{344a}$$

Die Einfachheit der Eigenschaften der Rotationspaare läßt schon vermuten, daß einem Rotationspaar auch eine einfache kine-

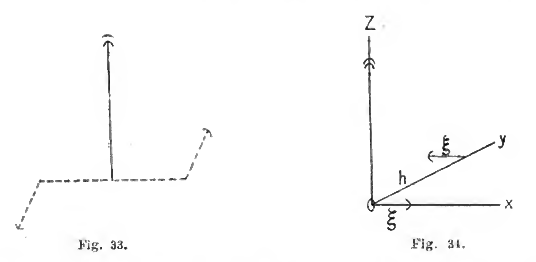


Fig. 33. Fig. 34.

matische Bedeutung zukommt; wir können dieselbe leicht feststellen, indem wir nach der Verschiebung fragen, die der Körper durch zwei gleiche antiparallele Rotationen erfährt. Nehmen wir die eine Drehungsachse zur x-Achse, den Arm h des Rotationspaares zur y-Achse (Fig. 34), so genügt es vollkommen, die Verschiebung zu berechnen, die ein ursprünglich in einer Koordinatenebene befindlicher Punkt des Körpers durch die beiden nacheinander ausgeführten Drehungen erfährt. Für einen Punkt der xy-Ebene ($z = 0$) z. B. ist die Verschiebung jedesmal parallel der z-Achse gerichtet, nämlich für die eine Rotation $\delta_1 z = \xi y$, für die andere Rotation $\delta_2 z = -\xi(y - h)$, zusammen:

$$\delta z = \delta_1 z + \delta_2 z = \xi h . \tag{345}$$

Die Verschiebung ist also für alle Punkte der xy-Ebene und daher auch für alle Punkte des Körpers gleich groß und gleich

gerichtet. Eine derartige Verschiebung des Körpers heißt eine Translation. Wir haben demnach ganz allgemein den Satz, daß ein Rotationspaar $\mathfrak{q}$ nichts anderes vorstellt als eine Translation, deren Größe nach (345) das Moment $|\mathfrak{q}|$ des Rotationspaares ist, und deren Richtung mit der Achse des Rotationspaares zusammenfällt.

Nun gewinnt auch die Gleichung (344a) bezüglich der Zusammensetzung verschieden gerichteter Rotationspaare, bzw. Translationen, eine neue anschauliche Bedeutung, und ebenso der Satz, daß der Vektor eines Rotationspaares auch seitlich beliebig verschoben werden kann. Denn bei einer Translation eines Körpers sind, im Gegensatz zu einer Drehung oder einer Kraft, alle zu der Richtung des Vektors parallelen Geraden gleichbedeutend.

Ferner gilt folgender Satz (§ 85). Eine Rotation $\mathfrak{o}$ um eine Achse, die durch irgendeinen Punkt $\mathfrak{r}$ geht, ist kinematisch gleichbedeutend mit einer Rotation $\mathfrak{o}$ um eine parallele Achse durch den Koordinatenanfangspunkt, zusammen mit einer Translation:

$$\mathfrak{q} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{o}], \tag{346}$$

die nach Größe und Richtung zusammenfällt mit der Verschiebung, welche der Koordinatenanfangspunkt durch die ursprünglich angenommene Rotation erleidet (§ 87).

Endlich können wir auch die am Anfang dieses Paragraphen aufgeworfene Frage nach der Zusammensetzung beliebiger Rotationen allgemein beantworten (§ 88). Wenn ein freier starrer Körper beliebig vielen unendlich kleinen Rotationen $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \mathfrak{o}_3, \cdots$, deren Achsen durch die Punkte $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \cdots$ hindurchgehen, in beliebiger Reihenfolge unterworfen wird, so ist die resultierende Verschiebung des Körpers äquivalent einer einzigen Rotation $\mathfrak{o}$ um den Koordinatenanfangspunkt, verbunden mit einer Translation $\mathfrak{q}$, wenn:

$$\mathfrak{o} = \Sigma \mathfrak{o}_1, \quad \mathfrak{q} = \Sigma [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{o}_1]. \tag{347}$$

Dabei hängt $\mathfrak{o}$ nicht ab von der Wahl des Koordinatenanfangspunktes, wohl aber $\mathfrak{q}$.

§ 103. Bevor wir weitergehen, wollen wir uns noch überzeugen, daß die Verschiebung (347) des Körpers auch die allgemeinste unendlich kleine Verschiebung ist, die er überhaupt erleiden kann. In der Tat: Wie sich auch der Körper verschieben möge, man kann die Verschiebung offenbar stets hervorbringen durch eine Translation, die so bemessen ist, daß der Koordinaten-

anfangspunkt (genauer: der materielle Punkt, der ursprünglich im Koordinatenanfangspunkt liegt) in seine Endlage gebracht wird, und hierauffolgend eine Rotation um den festgehaltenen Anfangspunkt. Ob diese Rotation um den (im Raume ruhenden) Koordinatenanfangspunkt erfolgt oder um den materiellen Punkt, welcher vor der Translation im Koordinatenanfangspunkt lag, bedingt nur einen verschwindend kleinen Unterschied im Resultat, da Punkte, welche der Drehungsachse unendlich nahe liegen, durch die Drehung nur unendlich kleine Verschiebungen höherer Ordnung erleiden.

Nach diesem Ergebnis können wir das Prinzip der virtuellen Arbeit unmittelbar zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingung eines freien starren Körpers benutzen. Es mögen an den Punkten $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots$ des Körpers die treibenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots$ angreifen. Dann denken wir uns dem Körper die allgemeinste virtuelle Verschiebung erteilt durch eine Rotation $\mathfrak{o}$ um den Anfangspunkt und eine Translation $\mathfrak{q}$. Die Verschiebung eines Punktes des Körpers wird dadurch nach (339):

$$\delta \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{q} + [\mathfrak{o}, \mathfrak{r}_1], \tag{348}$$

wobei $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{o}$ ohne Index bleiben, da sie allen Punkten des Körpers gemeinsam sind. Dieser Wert in den Ausdruck (321) der virtuellen Arbeit eingesetzt, ergibt nach leichter Umformung für das Gleichgewicht die Bedingung:

$$\Sigma \mathfrak{F}_1 \cdot \delta \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{q} \cdot \Sigma \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{o} \cdot \Sigma [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{F}_1] = 0, \tag{349}$$

und, da $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{o}$ gänzlich beliebig sind, so folgen die Gleichungen (306a), entsprechend den sechs Freiheitsgraden des Systems.

§ 103a. Kehren wir noch einmal zu den kinematischen Betrachtungen des § 102 zurück und verfolgen die Analogie des Systems der Rotationen mit dem System der Kräfte noch etwas weiter, im Sinne der §§ 88 bis 90. Dann können wir sogleich folgende Sätze aussprechen.

Die allgemeinste unendlich kleine Verschiebung eines freien starren Körpers läßt sich auch darstellen als Resultat zweier Rotationen, deren Achsen sich nicht schneiden. Ferner: Es ist immer möglich, den Koordinatenanfangspunkt O_0 so zu wählen, daß die Gesamtverschiebung (347) des Körpers dargestellt wird durch eine einzige Rotation $\mathfrak{o}$ um O_0 und eine Translation $\mathfrak{q}_0$, welche in die Richtung der Drehungsachse fällt. Diese spezielle durch O_0 gehende Achse $\mathfrak{o}$ heißt die „Zentralachse“ der Rotationen,

welche die Verschiebung (347) herbeiführen. Die entsprechende Translation $\mathfrak{q}_0$ ist die kleinste unter allen Translationen $\mathfrak{q}$, welche anderen Anfangspunkten O entsprechen. Eine solche Verschiebung $(\mathfrak{o}, \mathfrak{q}_0)$ heißt eine „Schraubenbewegung“. Daher läßt sich eine jede unendlich kleine Verschiebung eines starren Körpers als eine Schraubenbewegung auffassen. In speziellen Fällen artet die Schraubenbewegung aus in eine reine Drehung ($\mathfrak{q}_0 = 0$) oder in eine reine Translation ($\mathfrak{o} = 0$).

§ 104. Im Bisherigen haben wir die treibenden Kräfte $\mathfrak{F}$ stets als gegeben angenommen und über ihre Beschaffenheit keine näheren Voraussetzungen gemacht. Es ist aber selbstverständlich von größter Wichtigkeit, auch über diese Kräfte einiges Allgemeine aussagen zu können; wenden wir uns daher jetzt noch etwas ihrer Betrachtung zu.

In der Mechanik eines einzelnen materiellen Punktes haben wir schon gesehen (§ 36), daß, wenn die resultierende treibende Kraft $\mathfrak{F}$ von Zentralkräften herrührt, ihre Komponenten die Abgeleiteten einer bestimmten Funktion, des negativen Potentials $-U$, nach den Koordinaten des Punktes sind, oder, was dasselbe bedeutet, daß die Arbeit der treibenden Kräfte das vollständige Differential von $-U$ bildet. Ganz dasselbe läßt sich in dem Falle eines beliebigen Punktsystems behaupten, und zwar sowohl dann, wenn die Kräfte von festen Zentren herrühren, als auch dann, wenn die bewegten Punkte gegenseitig mit Zentralkräften aufeinander wirken.

Zum Beweise dieser Behauptung bedenken wir, daß die Gesamtarbeit der treibenden Kräfte bei irgendeiner Bewegung des Punktsystems die Summe der Arbeiten aller einzelnen Kräfte ist, und betrachten demnach die Glieder dieser Summe einzeln. Was nun zunächst die von festen Zentren herrührenden Kräfte betrifft, so erkennt man ohne weiteres, daß deren Arbeit an jedem der bewegten Punkte 1, 2, 3, $\cdots$ einzeln durch ein vollständiges Differential $-dU_1$, $-dU_2$, $-dU_3$, $\cdots$ dargestellt wird, nach dem im § 36 geführten Beweis. Bezüglich der gegenseitigen Wirkungen der bewegten Punkte denken wir uns ebenfalls die Gesamtarbeit zerlegt in die Arbeiten der Kräfte, welche zwei Punkte aufeinander ausüben, z. B. die Punkte 1 und 2. Diese Arbeit ist von der Form:

$$X_{12}dx_1 + Y_{12}dy_1 + Z_{12}dz_1 + X_{21}dx_2 + Y_{21}dy_2 + Z_{21}dz_2, \qquad (350)$$

wobei der erste der beiden Indizes den Punkt bedeutet, auf den die Kraftkomponente wirkt, der zweite den Punkt, von dem sie herrührt. Bezeichnet man nun die Größe der Kraft mit $f(r_{12})$, positiv, wenn sie eine anziehende ist, wobei:

$$r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \tag{351}$$

so gelten für die sechs Kräftekomponenten die Gleichungen (106), und der Ausdruck (350) der Arbeit wird:

$$-\frac{f(r_{12})}{r_{12}}\left\{(x_2-x_1)(dx_2-dx_1)+(y_2-y_1)(dy_2-dy_1)+(z_2-z_1)(dz_2-dz_1)\right\}$$
$$= -f(r_{12})\,dr_{12} = -\,dF(r_{12}), \tag{352}$$

nach der schon in (107) eingeführten Bezeichnung.

Setzen wir demnach das Kräftepotential:

$$U = \sum_1 U_1 + \sum_{1,2} F(r_{12}), \tag{353}$$

die zweite Summation erstreckt über alle paarweisen Kombinationen der Punkte, so ist die bei irgendeiner Verschiebung der Punkte von allen Zentralkräften geleistete Arbeit:

$$\Sigma \mathfrak{F}_1 \cdot d\mathfrak{r}_1 = -\,dU, \tag{354}$$

und die negative Abgeleitete von U nach irgendeiner Koordinate stellt die entsprechende resultierende Kraftkomponente dar.

Wenn wir uns das ganze Punktsystem zerlegt denken in zwei Teilsysteme, so erhellt aus der Gleichung (353), daß das Potential des gesamten Systems nicht etwa gleich ist der Summe der Potentiale der einzelnen Systeme, sondern daß zu diesen Potentialen, den „Selbstpotentialen" der beiden Systeme, noch hinzutritt das „Potential des einen Systems auf das andere System". Entsprechendes gilt für die Zerlegung in mehr als zwei Systeme.

§ 105. Wenn wir jetzt die Sätze des § 95 auf den Fall anwenden, daß die treibenden Kräfte $\mathfrak{F}$ ein Potential U haben, so gelangen wir zu Schlüssen, welche eine Verallgemeinerung der schon in § 67 gewonnenen darstellen. Zunächst ist nach (354) und (319):

$$dU < 0, \tag{355}$$

d. h. wenn ein ursprünglich ruhendes, beliebigen vorgeschriebenen Bedingungen unterworfenes Punktsystem durch Zentralkräfte in Bewegung gesetzt wird, nimmt dabei das Potential ab. Man kann das auch so ausdrücken: „Die Kräfte suchen das Potential zu

verkleinern". Wenn aber im Sinne von (320) für jede mögliche virtuelle Verschiebung:

$$\delta U \geqq 0\,, \tag{356}$$

so besteht Gleichgewicht. Denn wenn den Kräften keine Möglichkeit gewährt ist, das Potential zu verkleinern, so können sie auch keine Veränderung der Lage des Punktsystems bewirken.

Man kann noch weitergehen. Wenn in einer gewissen Lage des Punktsystems die Funktion U den kleinsten Wert besitzt, den sie mit Rücksicht auf die vorgeschriebenen Bedingungen überhaupt annehmen kann, dann befindet sich das System in dieser Lage im stabilen Gleichgewicht. Denn es gilt dann nicht nur die Gleichgewichtsbedingung $\delta U = 0$, sondern das System kehrt auch, ein wenig aus der Gleichgewichtslage gebracht und dann ruhend sich selber überlassen, nach (355) in die Gleichgewichtslage zurück, da durch eine andere Verschiebung das Potential nicht verkleinert werden kann. Umgekehrt ist für ein Maximum von U das Gleichgewicht labil, weil das Punktsystem, aus dieser Lage gebracht, nach (355) unmöglich in dieselbe zurückkehren kann. Ist aber U von den Koordinaten der Punkte ganz unabhängig, so ist ebenfalls $\delta U = 0$, also Gleichgewicht, aber dies Gleichgewicht ist indifferent, d. h. es besteht in jeder Lage der Punkte.

§ 106. Als ein einfaches Beispiel der hier abgeleiteten Sätze betrachten wir ein System diskreter oder stetig angeordneter schwerer Massenpunkte $m_1, m_2, m_3, \cdots$, die beliebigen vorgeschriebenen Bedingungen unterliegen, also etwa zum Teil starr miteinander verbunden oder fest sind, u. dgl. Da die Schwerkraft eine Zentralkraft ist, so besitzen hier die treibenden Kräfte ein Potential, welches sich nach (354) und (76a), wenn die z-Achse vertikal nach oben angenommen wird, aus der Gleichung ergibt:

$$\Sigma \mathfrak{F}_1 \cdot d\mathfrak{r}_1 = -g\,\Sigma m_1\, dz_1 = -dU,$$

und nach (287):

$$U = g z_0 \cdot \Sigma m_1 + \text{const.}\,, \tag{357}$$

d. h. das Schwerepotential eines Punktsystems ist, bis auf eine belanglose additive Konstante, das Produkt der Beschleunigung der Schwere, der gesamten Masse des Systems und der Höhe des Schwerpunktes. Da in diesem Produkt die Schwerpunktshöhe z_0 die einzige Variable ist, so erhalten wir nach dem vorigen Paragraphen den allgemeinen Satz, daß jeder Übergang eines solchen Punktsystems aus Ruhe in Bewegung mit einer Senkung des

Schwerpunktes verbunden ist, und daß ein Maximum, ein Minimum oder Unveränderlichkeit der Schwerpunktshöhe labiles, stabiles oder indifferentes Gleichgewicht bedeutet. In manchen Fällen ist die Richtigkeit dieses Satzes unmittelbar einleuchtend, so z. B. wenn bei einem starren Körper mit festem Drehpunkt der Schwerpunkt über, unter oder in dem Drehpunkt liegt. Aber in anderen Fällen führt er zu Folgerungen, die nicht von vornherein als selbstverständlich erscheinen. Hängen wir z. B. eine schwere Kette von beliebiger Art, mit gleichen oder ungleichen Gliedern, an zwei festen Punkten auf und lassen sie zwischen ihnen frei herabhängen, so nimmt die Kette im stabilen Gleichgewicht unter allen möglichen Lagen stets diejenige ein, bei welcher ihr Schwerpunkt am tiefsten liegt. Aus dieser Bedingung läßt sich die Gleichgewichtsform der Kette berechnen.

§ 107. Nach den dreidimensionalen starren Körpern wollen wir noch ein anderes Beispiel eines teilweise unfreien Punktsystems behandeln: einen undehnbaren vollkommen biegsamen Faden. Ein solcher stellt eine einfach unendliche Reihe von eindimensionalen, also linearen unendlich kleinen starren Massenelementen vor, deren jedes an seinen Endpunkten mit dem vorhergehenden und mit dem folgenden Element frei drehbar verbunden ist. Nur der Anfangspunkt und der Endpunkt des Fadens sind unverbunden und besonderen Bedingungen unterworfen. Auf den Faden mögen gegebene treibende Kräfte wirken; wir wollen sie stetig über seine Elemente verteilt annehmen, indem die auf das Bogenelement ds des Fadens wirkende Kraft die Komponenten:

$$\mathfrak{F}_x ds, \quad \mathfrak{F}_y ds, \quad \mathfrak{F}_z ds \tag{358}$$

besitzen möge. Die beiden Endpunkte des Fadens mögen festliegen. Gefragt ist nach der Gleichgewichtslage des Fadens.

Wir wollen diese Aufgabe wiederum nach jeder der beiden Methoden behandeln, die wir kennen gelernt haben, und von denen jede ihre besonderen Vorzüge hat: zuerst mittelst Einführung der Zwangskräfte, dann mittelst des Prinzips der virtuellen Arbeit.

Was die Zwangskräfte betrifft, welche die Undehnbarkeit des Fadens bedingen, so sind die in einem Punkt P des Fadens wirkenden Zwangskräfte dadurch definiert, daß sie die Kräfte vorstellen, welche man an dem Punkt P anbringen muß, damit der mechanische Zustand des betrachteten Punktsystems in keiner Weise gestört wird, falls man sich den Faden in diesem Punkte

durchschnitten denkt. Offenbar hat man hierzu in P zwei Kräfte anzubringen, welche die Zwangskräfte darstellen, mit denen die beiden in P zusammenstoßenden Fadenelemente aufeinander wirken. Dieselben sind nach dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung an Größe gleich, an Richtung entgegengesetzt und heißen die „Spannung" S des Fadens im Punkte P.

Die Größe S wird sich im allgemeinen von Punkt zu Punkt ändern. Die Richtung von S fällt, da der Zwang nur gegen Verlängerung, nicht aber gegen Verbiegung wirkt, an jedem Punkte zusammen mit der Richtung der Tangente der Fadenkurve.

Gleichgewicht wird dann vorhanden sein, wenn sich jedes Fadenelement im Gleichgewicht befindet. Betrachten wir also ein solches Fadenelement PQ von der Länge ds (Fig. 35). Auf dasselbe wirken drei Kräfte: erstens die Spannung S im Punkt P, zweitens die Spannung $S + dS$ im Punkt Q, drittens die treibende Kraft $\mathfrak{F} \cdot ds$. Wir bilden von diesen drei Kräften die x-Komponenten und setzen ihre Summe gleich Null. Die Spannung in P wirkt auf das Fadenelement tangentiell in der Richtung abnehmender s, wenn wir für die Endpunkte A und B des ganzen Fadens:

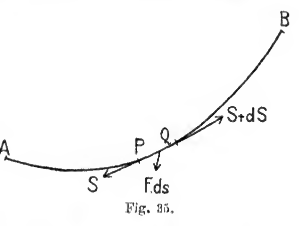


Fig. 35.

$$s = 0 \quad \text{und} \quad s = l \text{ (Fadenlänge)} \tag{359}$$

setzen; also ist die gesuchte Komponente: $-S\frac{dx}{ds}$. Die Spannung in Q besitzt andere Größe und andere Richtung als die in P, auch abgesehen von dem entgegengesetzten Vorzeichen. Daher ist ihre x-Komponente:

$$\left(S\frac{dx}{ds}\right)_{s+ds} = S\frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds}\left(S\frac{dx}{ds}\right) \cdot ds.$$

Somit ergeben die drei Komponenten zueinander addiert, mit Weglassung des gemeinsamen Faktors ds:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(S\frac{dx}{ds}\right) + \mathfrak{F}_x = 0, \\ \text{ebenso: } &\frac{d}{ds}\left(S\frac{dy}{ds}\right) + \mathfrak{F}_y = 0, \\ \text{und: } &\frac{d}{ds}\left(S\frac{dz}{ds}\right) + \mathfrak{F}_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{360}$$

Hierdurch ist die Aufgabe nach allen Richtungen gelöst. Denn diese drei Gleichungen ergeben nicht nur, durch Elimination von S, die beiden Gleichungen der Gleichgewichtskurve des Fadens, sondern auch die Größe der Spannung in jedem Punkte desselben. Einer besonderen Gleichgewichtsbedingung für die Endpunkte des Fadens A und B bedarf es nicht, da diese Punkte fest sind.

§ 108. Nun wollen wir dieselbe Aufgabe mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit behandeln. Dazu müssen wir die allgemeinsten Ausdrücke aufstellen für die virtuellen Verschiebungen aller Punkte x, y, z des Fadens. Da alle einzelnen Längenelemente starr sind, so ist die Variation von ds oder die von $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ gleich Null, also:

$$dx \cdot \delta dx + dy \cdot \delta dy + dz \cdot \delta dz = 0. \tag{361}$$

Damit der Sinn dieser Ausdrücke deutlich hervortritt, können wir uns denken, daß die Koordinaten x, y, z außer von dem Parameter s noch von einem zweiten, ganz beliebig gewählten endlichen Parameter p abhängen. Einem bestimmten Wert von p entspricht dann eine bestimmte Fadenkurve, einem geänderten Wert $p + \delta p$ eine bestimmte unendlich benachbarte Kurve, welche die Lagen der variierten Punkte des Fadens darstellt. Dabei ist $\delta x = \frac{\partial x}{\partial p} \delta p$, usw. Die Operationen d und δ, welche den Änderungen ds und δp entsprechen, sind ganz unabhängig voneinander, und daher vertauschbar: $\delta dx = d \delta x$, usw.

Die Gleichung (361) stellt unendlich viele feste Bedingungen von der Form (322) vor, wir wenden auf sie das in § 97 geschilderte **Lagrangesche** Eliminationsverfahren an, indem wir sie mit zunächst unbestimmt gelassenen, von Gleichung zu Gleichung verschiedenen Faktoren multiplizieren, dann zueinander und zu der virtuellen Arbeit addieren, und hierauf die Variationen δx, δy, δz als unabhängig voneinander behandeln. Auf diese Weise erhalten wir zunächst aus (361):

$$\int_0^l \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\delta x}{ds} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d\delta y}{ds} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d\delta z}{ds} \right) \cdot \lambda \cdot ds = 0,$$

wobei λ eine ganz beliebige Funktion von s sein kann, sodann durch Addition zur virtuellen Arbeit der treibenden Kräfte (358):

$$\int_0^l \left(\mathfrak{F}_x \delta x + \lambda \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\delta x}{ds} + \cdots\cdots \right) ds = 0.$$

Um diesen Ausdruck auf die unabhängigen Variationen δx δy, δz zu reduzieren, ist noch eine Umformung nötig, da δx in dem Glied mit λ nicht explizite, sondern nach s differentiiert auftritt. Dies kann geschehen durch Ausführung einer partiellen Integration:

$$\int_0^l \lambda \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\delta x}{ds} ds = \left[\lambda \frac{dx}{ds} \cdot \delta x\right]_0^l - \int_0^l \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right) \delta x \cdot ds, \qquad (362)$$

wobei das erste Glied rechts verschwindet, weil die Endpunkte des Fadens fest sind. Daher erhalten wir nunmehr als Gleichgewichtsbedingung:

$$\int_0^l \left(\mathfrak{F}_x - \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)\right) \delta x ds + \cdots = 0$$

und durch Nullsetzen der Koeffizienten aller einzelnen Variationen für jedes Fadenelement:

$$\mathfrak{F}_x - \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right) = 0, \;\cdots\cdots. \qquad (363)$$

Die Elimination von λ aus diesen drei Gleichungen ergibt offenbar die nämliche Kurve wie in (360) und damit Übereinstimmung der Resultate.

Der Vorteil des Prinzips der virtuellen Arbeit besteht, wie immer, in der Unabhängigkeit dieser Methode von speziellen mechanischen Betrachtungen. Dafür gewährt sie andererseits keinen näheren Einblick in die mechanischen Verhältnisse. Denn die physikalische Bedeutung von λ ergibt sich erst durch Vergleichung mit den Gleichungen (360), welche zeigen, daß λ die negative Spannung ist.

§ 109. Wir ziehen aus den Gleichungen (360) zunächst einige Folgerungen allgemeinerer Art. Schreibt man dieselben in der Form:

$$\frac{dS}{ds}\frac{dx}{ds} + S\frac{d^2x}{ds^2} + \mathfrak{F}_x = 0, \;\cdots \qquad (364)$$

multipliziert sie mit den Richtungscos der Binormalen (§ 25) der Kurve und addiert, so erhellt, daß die Richtung von $\mathfrak{F}$ in der Krümmungsebene der Fadenkurve liegt, wie sich auch nach einer einfachen physikalischen Überlegung als notwendig erweist.

Multipliziert man sie aber mit den Richtungscos des Bogenelements ds und addiert, so ergibt sich nach (73) und (73a):

$$\frac{dS}{ds} + \mathfrak{F}_x \frac{dx}{ds} + \mathfrak{F}_y \frac{dy}{ds} + \mathfrak{F}_z \frac{dz}{ds} = 0\,, \tag{365}$$

d. h. die Veränderlichkeit der Spannung längs dem Faden wird gemessen durch die Komponente von $\mathfrak{F}$ in der Richtung des Fadens. Steht die Kraft $\mathfrak{F}$ überall senkrecht auf der Fadenkurve, so ist die Spannung überall die nämliche.

Wenn die Kraft $\mathfrak{F}$ ein Potential hat, so ist:

$$\frac{dS}{ds} - \frac{dU}{ds} = 0\,, \quad S = U + \text{const.}\,, \tag{366}$$

d. h. die Spannung ist gleich dem (auf die Längeneinheit bezogenen) Potential bis auf eine additive Konstante.

§ 110. Nehmen wir jetzt an, die treibende Kraft sei die Schwere, und der Faden sei homogen; dann wird seine Gleichgewichtsform als gemeine Kettenlinie bezeichnet. Wenn die Masse des ganzen Fadens M ist, so ist die des Fadenelements ds gleich $M \cdot \frac{ds}{l}$, und die Komponenten (358) der darauf wirkenden Kraft werden:

$$\mathfrak{F}_x = 0\,, \quad \mathfrak{F}_y = 0\,, \quad \mathfrak{F}_z ds = -M \cdot \frac{ds}{l} \cdot g\,. \tag{367}$$

Das Potential der Kraft $\mathfrak{F}$ ist demnach:

$$U = \frac{M}{l} g z + \text{const.} \tag{368}$$

Nach § 109 liegt die Fadenkurve in einer vertikalen Ebene, die durch die Endpunkte A und B des Fadens bestimmt ist. Machen wir sie zur xz-Ebene, so reduzieren sich die Gleichungen (360) auf:

$$\frac{d}{ds}\left(S \frac{dx}{ds}\right) = 0\,,$$
$$\frac{d}{ds}\left(S \frac{dz}{ds}\right) - \frac{Mg}{l} = 0\,.$$

Integriert:

$$S \frac{dx}{ds} = \frac{Mg}{l} c\,, \tag{369}$$

$$S \frac{dz}{ds} = \frac{Mg}{l} (s + c_1)\,, \tag{370}$$

wobei c und c_1 zwei Konstante von der Dimension einer Länge vorstellen.

Wertvoll ist auch die sich aus (366) und (368) ergebende Beziehung:

$$S = \frac{Mg}{l} (z + c_2)\,. \tag{371}$$

Zur Aufstellung der Kurvengleichung in rechtwinkligen Koordinaten eliminiert man am bequemsten S aus (369) und (371):

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c}{z + c_2}.$$

Durch Substitution von $ds^2 = dx^2 + dz^2$ gelangt man dann zur Differentialgleichung:

$$dx = \frac{c\,dz}{\sqrt{(z + c_2)^2 - c^2}},$$

deren Integral ist:

$$x = c \log \left\{ \frac{z + c_2}{c} + \sqrt{\left(\frac{z + c_2}{c}\right)^2 - 1} \right\} + c_3 \qquad (372)$$

oder, nach z aufgelöst:

$$z = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x - c_3}{c}} + e^{-\frac{x - c_3}{c}}\right) - c_2. \qquad (373)$$

Die vier konstanten Längen c, c_1, c_2, c_3 ergeben sich aus den beiden Gleichungen (359) und den beiden Bedingungen, daß die gegebenen Punkte A und B auf der Kurve liegen.

Die einfachste Form gewinnt die Gleichung der gemeinen Kettenlinie, wenn man den Koordinatenanfangspunkt im Punkte $x = c_3$, $z = -c_2$ wählt. Dann lautet sie:

$$z = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right). \qquad (374)$$

Die Kurve verläuft symmetrisch zu beiden Seiten der z-Achse, sie steigt für zunehmende oder abnehmende x rasch in die Höhe und besitzt ihr Minimum im Punkte $\frac{dz}{dx} = 0$ oder:

$$x = 0, \quad z = c.$$

Statt der Punkte A und B können natürlich irgend zwei beliebige andere Punkte der Kurve, auf verschiedenen Seiten oder auch auf der nämlichen Seite des Minimums, als feste Aufhängepunkte gewählt werden, ohne daß die Form der Kurve sich ändert. Die Spannung S ist dann nach (371) einfach:

$$S = \frac{Mg}{l} z, \qquad (375)$$

ihr minimaler Wert also $\frac{Mg}{l} c$.

§ 111. Wir wollen noch das Gleichgewicht eines Fadens betrachten, der auf einer festen Fläche $f(x, y, z) = 0$ ausgespannt ist, und zwar nehmen wir gleich den speziellen Fall, daß nur auf den Endpunkt B des Fadens eine treibende Kraft $\mathfrak{F}$ wirkt. Man kann

sich dies dadurch realisiert denken, daß der Faden in dem Punkt A der Fläche befestigt und in dem Punkt B der Fläche durch einen kleinen dort befestigten Ring gezogen ist, wo er von der Kraft $\mathfrak{F}$ straff angespannt wird. Natürlich wendet die feste Fläche dem Faden ihre konvexe Seite zu; denn sonst würde er sich gar nicht an sie anlegen. Die Gleichungen (360) werden dann:

$$\frac{d}{ds}\left(S\frac{dx}{ds}\right)+\mathfrak{Z}_x=0\,, \cdots\cdots, \tag{376}$$

wobei die Komponenten der von der festen Fläche auf die Längeneinheit des Fadens ausgeübten Zwangskraft $\mathfrak{Z}$ der Bedingung (246) genügen. Hieraus und aus der Gleichung der Fläche $f=0$, oder auch, in differentiierter Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}=0 \tag{377}$$

ergibt sich die Gleichung der Fadenkurve, die Spannung S des Fadens und die auf ihn wirkende Zwangskraft $\mathfrak{Z}$, welche nach dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung zugleich auch den Druck darstellt, den die Fläche von dem gespannten Faden erleidet.

Multiplizieren wir die Gleichungen (376) mit $\frac{dx}{ds}$ usw. und addieren, so ergibt sich mit Rücksicht auf (246) und (377):

$$\frac{dS}{ds}=0\,, \quad S=\text{const.}\,, \tag{378}$$

d. h. die Spannung des Fadens ist überall die nämliche und gleich der Größe F der treibenden Kraft, da sie in B dieser Kraft das Gleichgewicht hält, — ein Resultat, das sich auch direkt aus (365) ergibt, wenn man bedenkt, daß die Zwangskraft $\mathfrak{Z}$ überall senkrecht steht auf der Fadenkurve. Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen (376) zu:

$$F\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\mathfrak{Z}_x=0\,, \cdots\cdot, \tag{379}$$

woraus sich die Größe der Zwangskraft ergibt:

$$|\mathfrak{Z}|^2=F^2\cdot\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}$$

oder nach (74):

$$|\mathfrak{Z}|=\frac{F}{\varrho}\,, \tag{380}$$

d. h. die Größe des von dem Faden auf die Fläche ausgeübten Druckes ist für die Längeneinheit gleich dem Quotienten aus der spannenden Kraft und dem Krümmungsradius der Fadenkurve.

Je stärker gekrümmt die Kurve ist, um so größer wird dieser Druck, für eine gerade Linie verschwindet er ganz.

Da die Richtung von $\mathfrak{Z}$ durch (246) gegeben ist, so folgen aus (379) für die Fadenkurve die Gleichungen (250), welche besagen, daß der Faden im Gleichgewicht die Form einer geodätischen Linie auf der Fläche annimmt, welche durch die Punkte A und B hindurchgeht.

Hieraus folgt mit Rücksicht auf das Prinzip der virtuellen Arbeit eine neue wichtige Eigenschaft der geodätischen Linien. Nach jenem Prinzip befindet sich nämlich der Faden dann im stabilen Gleichgewicht, wenn er unter allen Kurven, die auf der Fläche von A nach B gezogen werden können, diejenige von kürzester Länge einnimmt. Denn sonst würde die treibende Kraft $\mathfrak{F}$, die einzige, welche überhaupt vorhanden ist, durch Anziehen des Fadens durch den Ring B hindurch positive Arbeit leisten können (§ 95). Daher ist jede Kurve kürzester Länge auf der Fläche zugleich eine geodätische Linie derselben. Diese Eigenschaft hat den geodätischen Linien ihren Namen gegeben, da die Entfernung je zweier Punkte der Erdoberfläche auf der kürzesten Verbindungslinie gemessen wird.

Auf einer Kugel sind die kürzesten Linien die größten Kreise, in einer Ebene die Geraden.

Der Satz läßt sich aber nicht allgemein umkehren, d. h. eine geodätische Linie ist nicht immer die kürzeste zwischen zweien ihrer Punkte, ebenso wie die Gleichung $\delta s = 0$ zwar eine notwendige, aber nicht immer zugleich die hinreichende Bedingung für das Minimum von s ist. In der Tat verliert z. B. ein Bogenstück eines größten Kreises auf einer Kugel die Eigenschaft, die kürzeste Verbindungslinie zwischen seinen Endpunkten zu sein, wenn die Länge des Bogenstückes größer wird als der halbe Kreisumfang. Dann befindet sich ein darauf ausgespannter Faden zwar noch im Gleichgewicht, aber dasselbe ist nicht mehr stabil.

§ 112. In allen unseren bisherigen Betrachtungen hatten wir die treibenden Kräfte als gegeben angenommen. In der Natur hat man es aber häufig mit Aufgaben zu tun, bei denen treibende Kräfte von verwickelter und schwer bestimmbarer Art ins Spiel kommen, namentlich wenn sie im Innern der Körper wirken. Deshalb ist es von größter Wichtigkeit, ein Prinzip zu besitzen, welches auch in den kompliziertesten Fällen zu einer einfachen

und bequem anwendbaren Gleichgewichtsbedingung führt. Zur Ableitung desselben kehren wir zurück zu den in der Einleitung dieses Teiles, § 76, gemachten Ausführungen. An der Hand der dort geschilderten Betrachtungsweise lassen sich zunächst alle in einem System materieller Punkte wirkenden Kräfte einteilen in innere und äußere Kräfte. Innere Kräfte sind alle diejenigen, welche von Punkten des Systems herrühren, äußere Kräfte alle diejenigen, welche von Punkten außerhalb des Systems herrühren. Ob eine bestimmte ins Auge gefaßte Kraft eine innere oder eine äußere ist, läßt sich demnach erst dann entscheiden, wenn man die, von vornherein ganz willkürliche, Auswahl des Punktsystems getroffen hat. Man kann jede innere Kraft dadurch zu einer äußeren machen, daß man den Punkt, von dem sie herrührt, aus dem System ausschließt, und umgekehrt.

Diese Einteilung in innere und äußere Kräfte deckt sich natürlich nicht mit der zwischen treibenden und Zwangskräften. Es gibt innere und äußere treibende Kräfte, und es gibt innere und äußere Zwangskräfte. Bei einem schweren starren Körper mit festem Drehpunkt z. B. sind die Molekularkräfte innere Zwangskräfte. Die Unterstützung des festen Punktes ist eine äußere Zwangskraft, die Schwere ist eine äußere treibende Kraft. Bezieht man aber die Erde mit in das Punktsystem hinein, so werden alle diese Kräfte innere Kräfte.

Was nun die Unterscheidung zwischen inneren und äußeren Kräften so fruchtbar macht, ist der Umstand, daß die inneren Kräfte in einem Punktsystem stets paarweise vorkommen, und zwar an Größe gleich und an Richtung entgegengesetzt (§ 76).

Dieser Umstand, in Verbindung mit dem unmittelbar einleuchtenden Satze, daß ein jeder Gleichgewichtszustand eines jeden Punktsystems als solcher erhalten bleibt, wenn man sich alle Punkte des Systems miteinander starr verbunden denkt, führt zu dem fundamentalen Satz: Wenn ein Punktsystem im Gleichgewicht ist, so halten sich die äußeren Kräfte an dem starr gedachten System im Gleichgewicht. Denn da die inneren Kräfte sich an dem starren System gegenseitig paarweise aufheben, kann man sie ganz fortlassen und erreicht dadurch eine Vereinfachung, die um so mehr ins Gewicht fällt, als gerade die inneren Kräfte in vielen Fällen sehr wenig bekannt sind.

Da die Wahl des Punktsystems eine ganz beliebige ist, so enthält das angeführte Prinzip sehr zahlreiche Folgerungen, von

deren Reichhaltigkeit einige spezielle Beispiele eine Vorstellung geben mögen.

§ 113. Nehmen wir den einfachen Fall eines starren geradlinigen Stabes, der sich unter der Einwirkung zweier gleicher paralleler Kräfte F in seinen Endpunkten A und B, und einer antiparallelen Kraft $2F$ in seinem Mittelpunkt C im Gleichgewicht befindet. Nun wählen wir einen Teil des Stabes, etwa AD (Fig. 36), als Punktsystem. Dann sind die äußeren Kräfte die Kraft F in A, die Kraft $2F$ in C, und die Kräfte, mit denen der Stabteil DB in D auf den Stabteil AD wirkt. Da die äußeren Kräfte zusammen sich im Gleichgewicht halten, so besteht die Einwirkung des Stabteiles DB auf AD aus einer Kraft F mit dem Angriffspunkt D, zusammen mit einem Kräftepaar vom Moment $F \cdot BD$, dessen Achse senkrecht steht auf der Bildebene (in der Fig. 36 vom Bilde zum Beschauer gerichtet).

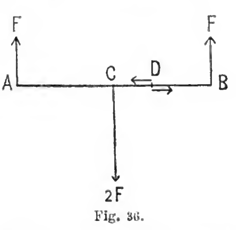


Fig. 36.

Dieses Kräftepaar kann nur dadurch realisiert werden, daß an verschiedenen Punkten des Stabquerschnittes in D verschiedene Kräfte wirken (in der Fig. 36 an der oberen Hälfte von rechts nach links, an der unteren Hälfte von links nach rechts, wie durch die kleinen Pfeile angedeutet ist). Ein unendlich kleiner Querschnitt bzw. ein biegsamer Faden würde dies nicht leisten können; in einem endlichen Querschnitt aber besteht auf der einen Seite ein Druck (Kompression), auf der anderen ein Zug (Dehnung).

Auf diese Weise gibt uns unser Prinzip Aufschluß über die Kräfteverhältnisse auch im Innern eines Körpers. Der betrachteten Wirkung eines Körperteiles auf einen anderen entspricht natürlich immer die gleiche und entgegengesetzte des zweiten Körperteiles auf den ersten.

§ 114. Ein anderes Beispiel entnehmen wir dem Bereich der Flüssigkeiten. Denken wir uns eine große Quantität einer schweren Flüssigkeit im Zustand der Ruhe und wählen wir einen Teil derselben von beliebiger Form, der rings von Flüssigkeit umgeben ist, als Punktsystem, so sind die äußeren Kräfte das Gewicht des flüssigen Systems: G_f, und die von den angrenzenden Flüssigkeitsteilen auf das System ausgeübten Druckkräfte (in der Fig. 37

durch Pfeile angedeutet) mit der Resultierenden F. Nach dem Satz in § 112 ist daher:

$$F = -G_f . \tag{381}$$

Die Druckkräfte liefern also eine Resultierende, welche dem Gewicht des flüssigen Systems gleich und entgegengesetzt ist und als „Auftrieb“ bezeichnet wird.

Denken wir uns nun weiter, daß an die Stelle des betrachteten Punktsystems irgendein fester Körper von genau der nämlichen Form gebracht ist, der schwerer sei als die Flüssigkeit und am Herabfallen dadurch gehindert wird, daß er an einem Faden aufgehängt ist. Wählen wir diesen festen Körper als Punktsystem, so sind die äußeren Kräfte sein Gewicht G, die Druckkräfte der angrenzenden Flüssigkeit mit der Resultierenden F, und der Zug des Fadens nach oben, der das „scheinbare Gewicht“ G' des Körpers in der Flüssigke[illegible] [illegible]st. Demgemäß haben w[illegible]:

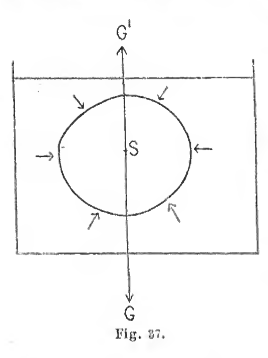


Fig. 37.

$$G + [illegible] G' = 0$$

oder nach (381):

$$G' = G - G_f ; \tag{382}$$

d. h. das scheinbare Gewicht des Körpers in der Flüssigkeit ist gleich dem wirklichen Gewicht, vermindert um das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, — der Satz des A r c h i m e d e s.

§ 115. Schließlich machen wir noch eine Anwendung auf einen gasförmigen Körper, nämlich auf das Gleichgewicht der Atmosphäre. Betrachten wir einen vertikalen Luftzylinder vom Querschnitt Eins und denken uns aus ihm durch zwei horizontale Querschnitte eine Luftschicht ausgeschnitten, die wir als Punktsystem wählen. Die äußeren Kräfte sind dann erstens das Gewicht der Luftschicht, zweitens der Druck der umgebenden Luft, der am oberen Querschnitt nach unten, am unteren Querschnitt nach oben und an der Mantelfläche des Zylinders horizontal nach innen gerichtet ist. Unser Prinzip § 112 erfordert, daß das Gewicht der Luftschicht gleich ist der Druckdifferenz an dem unteren und oberen Querschnitt.

Nimmt man die Luftschicht unendlich dünn, so ist ihr Gewicht

proportional der Dichtigkeit der Luft in der betreffenden Höhe, und die Einführung der allgemeinen Beziehung zwischen Dichtigkeit und Druck liefert dann die Differentialgleichung zur Berechnung der Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe.

So entspringen aus dem allgemeinen Gleichgewichtsprinzip für starre Körper auch die in der Hydrostatik und Aërostatik grundlegenden Sätze.

Drittes Kapitel. Dynamik eines beliebigen Punktsystems.

§ 116. Wir sind nun soweit vorbereitet, um die allgemeinen Gesetze zu entwickeln, in denen sowohl die der Mechanik eines einzelnen materiellen Punktes als auch die der Statik eines beliebigen Punktsystems als spezielle Fälle enthalten sind.

Es gelte, die Bewegung eines Systems von n materiellen Punkten zu bestimmen, mit den Massen $m_1, m_2 \cdots$, auf welche gegebene treibende Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots$ wirken, und deren Bewegungsfreiheit durch p Bedingungsgleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\cdots\cdots$ zwischen den Koordinaten der Punkte und der Zeit t eingeschränkt ist.

Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich unmittelbar aus einer Anwendung des Prinzips von d'Alembert (§ 66), nach welchem das Punktsystem sich zu jeder Zeit t im Gleichgewicht befindet, falls man den darauf wirkenden Kräften noch die Trägheitswiderstände $-m_1 \dot{\mathfrak{q}}_1, -m_2 \dot{\mathfrak{q}}_2, \cdots$ an allen einzelnen Punkten hinzugefügt denkt.

Dadurch ist mit einem Schlage die Dynamik zurückgeführt auf die Statik, und wir können unmittelbar das Prinzip der virtuellen Arbeit (321) anwenden:

$$\Sigma(\mathfrak{F}_1 - m_1 \dot{\mathfrak{q}}_1) \cdot \delta \mathfrak{r}_1 = 0, \tag{383}$$

oder auch die Gleichungen (324) von Lagrange:

$$\mathfrak{F}_{x1} - m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \cdots = 0 \tag{384}$$

usw. für alle Koordinaten und Punkte. Multipliziert man die Gleichungen (384) einzeln mit den entsprechenden Koordinatenvariationen $\delta x_1, \cdots$ und addiert, so ergibt sich wieder (383), mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (322) für die Variationen.

Die Elimination der p Größen $\lambda, \mu, \cdots$ aus (384) ergibt $3n - p$ lineäre Gleichungen zwischen den Beschleunigungen und den treibenden Kräften, welche zusammen mit den p vorgeschriebenen Bedingungen die Beschleunigungen eindeutig berechnen lassen.

§ 117. Eine besondere Bemerkung erheischt noch der Fall, daß die Zeit t in den Bedingungsgleichungen $f=0, \cdots$ explizite vorkommt, wie z. B. wenn ein Punkt gezwungen ist, auf einer in bestimmter Weise sich bewegenden Fläche zu bleiben. Hier könnte es nämlich von vornherein zweifelhaft sein, welcher Bedingung die virtuellen Verschiebungen genügen müssen, da doch die Bedingungsgleichung den veränderlichen Parameter t enthält. Die Gleichungen (322), welche nach dem Obigen auch hier gültig sein müssen, zeigen, daß bei der Variation der Koordinaten die Zeit t unvariiert bleibt, daß also z. B. bei einem auf einer bewegten Fläche befindlichen Punkt die virtuelle Verschiebung zur Zeit t von derselben Art ist, als ob die Fläche in der Lage, die sie zur Zeit t einnimmt, ruhte.

Eine anschauliche Vorstellung von der Bedeutung dieses Umstandes gewährt der im § 75 behandelte Fall einer mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gedrehten Geraden, mit der Fig. 17. Hier ist die virtuelle Verschiebung längs der zur Zeit t ruhenden Geraden, also in der Richtung AB, nicht etwa in der Richtung AA', vorzunehmen; in der Tat ist nur dann die virtuelle Arbeit der Zwangskraft gleich Null. Darnach ergibt die Bedingungsgleichung (277), bei konstantem t variiert:

$$\delta y = \operatorname{tg}(\omega t) \cdot \delta x ,$$

und dies in Verbindung mit dem Prinzip (383):

$$\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y = 0$$

liefert die nämliche Bewegungsgleichung (278a) wie früher.

§ 118. Die Gleichung (383) gilt für jedes beliebige System von unendlich kleinen Koordinatenverschiebungen $\delta x_1, \cdots$, welches die Bedingungen (322) befriedigt. Betrachten wir demgegenüber diejenigen unendlich kleinen Koordinatenverschiebungen $dx_1, \cdots$, welche in dem Zeitelement dt bei der Bewegung der Punkte wirklich eintreten, so genügen dieselben den Bedingungen:

$$(385) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

welche sich von den Gleichungen (322) dadurch wesentlich unterscheiden, daß sie noch die Glieder mit $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \cdots$ enthalten. Daher gehören die wirklichen Verschiebungen $dx_1, \cdots$ im allgemeinen nicht zu dem System der virtuellen Verschiebungen, und man darf in (383) $\delta \mathfrak{r}$ nicht durch $d\mathfrak{r}$ ersetzen.

Wenn aber die vorgeschriebenen Bedingungen $f=0$, $\varphi=0, \cdots$ die Zeit t nicht explizite enthalten, was wir nun annehmen wollen, so verschwinden die Glieder, welche den Unterschied von (322) und (385) bilden, und die wirklichen Verschiebungen sind ein Spezialfall der virtuellen Verschiebungen. Daher gilt dann nach (383):

$$\Sigma(\mathfrak{F}_1 - m_1 \dot{\mathfrak{q}}_1) \cdot d\mathfrak{r}_1 = 0,$$

oder anders geschrieben:

$$dL = \Sigma \mathfrak{F}_1 \cdot d\mathfrak{r}_1, \tag{386}$$

wenn gesetzt wird:

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m_1 q_1^2 = \frac{1}{2} \Sigma m_1 (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2). \tag{387}$$

Nennen wir die Größe L die lebendige Kraft des Punktsystems, so besagt die Gleichung (386), daß die Änderung der lebendigen Kraft des Punktsystems gleich ist der Gesamtarbeit der treibenden Kräfte, in vollkommener Analogie mit der Gleichung (147) und ganz ohne Rücksicht auf die vorgeschriebenen Bedingungen, wie in § 67.

Diese einfache Beziehung kommt natürlich dadurch zustande, daß die Gesamtarbeit der Zwangskräfte nicht nur bei jeder virtuellen, sondern auch bei der wirklichen Verschiebung des Punktsystems im Zeitelement dt verschwindet. Das wäre nicht der Fall, wenn die vorgeschriebenen Bedingungen die Zeit t explizite enthielten, wie schon an dem einfachen Beispiel in § 75 näher auseinandergesetzt wurde.

§ 119. Für Kräfte, die ein Potential U haben, ist nach (354) und (386) durch Integration nach der Zeit t:

$$L + U = \text{const.} = L_0 + U_0, \tag{388}$$

und wenn wir wieder, wie in § 49, die Größe:

$$L + U = E \tag{389}$$

die Energie des Punktsystems nennen, als die Summe der kinetischen Energie L und der potentiellen Energie U, so spricht die Gleichung (388) den Satz der Erhaltung der Energie aus. Von dessen Verallgemeinerung auf nichtmechanische Vorgänge ist schon im § 49 ausführlich die Rede gewesen.

Die Gleichung (388) gibt uns auch die Möglichkeit, den im § 105 angestellten Betrachtungen noch eine andere Seite abzugewinnen. Dort wurde gezeigt, daß einem Minimum des Potentials U

ein stabiler Gleichgewichtszustand des Punktsystems entspricht. Wir bewiesen dies durch die Überlegung, daß das Punktsystem, ein wenig aus der Gleichgewichtslage gebracht und dann ruhend sich selbst überlassen, nur in der Richtung nach dem Minimum von U hin in Bewegung geraten kann. Nun läßt sich eine kleine Störung des Gleichgewichts auch noch auf eine allgemeinere Weise hervorbringen, nämlich dadurch, daß man den Punkten, bevor man sie sich selbst überläßt, kleine Anfangsgeschwindigkeiten erteilt.

Im Anfangszustand der dann eintretenden Bewegung ist dann L_0 eine kleine positive Größe, und U_0 ist gleich $U_{\min} + U_0'$, wobei U_0' ebenfalls klein und positiv ist. Folglich ist nach (388) für die ganze Dauer der Bewegung:

$$L + U - U_{\min} = L_0 + U_0' \tag{390}$$

klein und positiv. Da nun erstens L aus lauter positiven Gliedern besteht und zweitens $U - U_{\min}$ positiv ist, so bleiben die Geschwindigkeiten aller Punkte andauernd klein, und das Punktsystem verharrt in der Nähe der Gleichgewichtslage, d. h. das Gleichgewicht ist stabil. Entsprechendes gilt für ein Maximum von U.

§ 120. Im allgemeinen werden die treibenden Kräfte, die auf das Punktsystem wirken, nicht konservativer Natur (§ 49) sein, namentlich dann nicht, wenn von außen her mehr oder weniger willkürliche Eingriffe an dem System vorgenommen werden. Daher wollen wir jetzt voraussetzen, daß die treibenden Kräfte von zweierlei Art sind: konservative Kräfte, und äußere Kräfte nichtkonservativer Natur, die wir mit $\mathfrak{F}_a$ bezeichnen. Dann gilt allgemein für die Arbeit der treibenden Kräfte:

$$\Sigma \mathfrak{F}_1 d\mathfrak{r}_1 = -dU + A, \tag{391}$$

wenn wir mit:

$$A = \Sigma \mathfrak{F}_a \cdot d\mathfrak{r} \tag{392}$$

die Arbeit der äußeren Kräfte oder die „äußere Arbeit" bezeichnen, und die Gleichung (386) der Energie wird:

$$d(L + U) = dE = A, \tag{393}$$

d. h. die Änderung der Energie des Punktsystems ist gleich der äußeren Arbeit, positiv oder negativ, je nachdem äußere Arbeit „gegen das System" oder „von dem System" geleistet wird. Im ersten Fall erfolgt die Veränderung im Sinne der äußeren Kräfte, im zweiten Fall erfolgt sie entgegen den äußeren Kräften.

Schließt man die Punkte oder Körper, von denen die äußeren

Wirkungen ausgehen, mit in das betrachtete Punktsystem ein, so verschwinden alle äußeren Kräfte (vgl. § 112), und das System heißt ein „vollständiges“ oder „abgeschlossenes“ System. Für ein vollständiges System gilt das Energieprinzip wieder in der Form (388) als der Satz der Erhaltung der Energie, und in diesem Sinne spricht man von der Erhaltung der Energie der ganzen Welt als desjenigen materiellen Systems, welches sämtliche wirkungsfähigen Körper umfaßt. Indessen ist zu bedenken, daß in der wirklichen Natur ein abgeschlossenes System im absoluten Sinne nicht mit Sicherheit nachweisbar ist, und daß man daher nicht mit der Energie der „Welt“ als einer bestimmten Größe rechnen kann.

Dies hindert natürlich nicht, unter Umständen auch beliebig kleine endliche Punktsysteme, gehörig idealisiert, als abgeschlossene Systeme zu behandeln.

Zerlegt man ein vollständiges System in zwei Teilsysteme, so werden durch die Arbeiten der von den Punkten des einen Teilsystems auf die des anderen ausgeübten Kräfte die Energien der Teilsysteme sich ändern, d. h. es wird durch diese Arbeiten Energie von dem einen Teilsystem auf das andere übertragen, während die Gesamtenergie konstant bleibt. Dabei ist aber zu beachten, daß im allgemeinen die potentielle Energie des ganzen Systems nicht, wie die kinetische, gleich der Summe der Energien der Teilsysteme ist (§ 104).

§ 121. Um eine anschauliche Vorstellung von der Größe der kinetischen Energie eines Punktsystems zu gewinnen, empfiehlt es sich häufig, dieselbe zu beziehen auf ein bewegtes Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Schwerpunkt des Systems liegt. Dann ergeben die Transformationsgleichungen (191) für die Größe (387) der kinetischen Energie den Ausdruck:

$$L = \frac{1}{2}\Sigma m_1 q_1'^2 + u_0 \Sigma m_1 u_1' + v_0 \Sigma m_1 v_1' + w_0 \Sigma m_1 w_1' + \frac{1}{2} q_0^2 \Sigma m_1 .$$

Da aber, wie man durch Differentiation von (287) nach der Zeit t findet:

$$\Sigma m_1 u_1' = \Sigma m_1 (u_1 - u_0)^{\cdot} = 0, \cdots, \tag{394}$$

so reduziert sich die kinetische Energie auf:

$$L = \frac{1}{2} q_0^2 \Sigma m_1 + \frac{1}{2} \Sigma m_1 q_1'^2, \tag{394 a}$$

d. h. die kinetische Energie eines Punktsystems setzt sich additiv zusammen aus der kinetischen Energie seines Schwerpunktes, wenn

man sich in ihm alle Massen vereinigt denkt (Energie der „fortschreitenden“ Bewegung) und der kinetischen Energie relativ zum Schwerpunkt (Energie der „schwingenden“ Bewegung, wozu als Spezialfall auch die rotierende Bewegung gehört).

§ 122. Das Grundgesetz der Mechanik, das wir bisher in die Gleichungen (383) oder auch (384) gefaßt haben, läßt noch mehrere andere Formulierungen zu, welche physikalisch genau denselben Inhalt besitzen, aber für die Anwendung sehr verschiedenartige Eigentümlichkeiten darbieten. Eine der wichtigsten ist das Prinzip der kleinsten Wirkung. Wir entwickeln dasselbe hier in der Form, die ihm Hamilton gegeben hat.

Da die Gleichung (383) des Prinzips der virtuellen Arbeit für jede Zeit t gilt, können wir sie auch nach t integrieren, von t_0 bis t_1, und erhalten so:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum \left(\mathfrak{F}_x - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x = 0, \tag{395}$$

die Summierung über alle Koordinaten und Punkte des Systems erstreckt gedacht. Hierbei sind nicht nur die Koordinaten x, y, z, sondern auch die Variationen $\delta x, \cdots$ als Funktionen der Zeit t zu behandeln. Um dies klar zu übersehen, denkt man sich am besten die Koordinaten aller Punkte außer von t noch von einem zweiten, ganz beliebig gewählten endlichen Parameter p abhängig, genau so, wie dies schon im § 108 ausgeführt wurde. Einem bestimmten Wert von p entspricht die gesuchte, einstweilen noch als unbekannt vorausgesetzte Bewegung des Punktsystems, einem geänderten Wert $p + \delta p$ eine andere bestimmte, der wirklichen „unendlich benachbarte“ Bewegung, die aber natürlich den Bewegungsgleichungen nicht genügt. Die Operationen d und δ, welche den Änderungen dt und δp entsprechen, sind ganz unabhängig voneinander, und daher vertauschbar:

$$\frac{d\delta x}{dt} = \delta\frac{dx}{dt}, \cdots. \tag{396}$$

Die Variationen $\delta x = \frac{\partial x}{\partial p}\delta p, \cdots$ sind zu jeder Zeit t ganz beliebig und nur den Bedingungen (322) unterworfen, in denen die Funktionen $f, \varphi, \cdots$ auch die Zeit t explizite enthalten können.

Indem wir nun das Zeitintegral (395) umformen, haben wir zunächst nach (391) für die virtuelle Arbeit:

$$\Sigma\, \mathfrak{F}_x \delta x = -\delta U + A, \tag{397}$$

wo U das Potential der konservativen Kräfte des Systems, A die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte bezeichnet. Eine äußere Kraft, die zugleich konservativ ist (z. B. die Schwere), kann nach Belieben entweder in $-\delta U$ oder in A untergebracht werden.

Ferner ergibt sich durch partielle Integration das Glied:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x = \left[\frac{dx}{dt} \delta x\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \frac{dx}{dt} \frac{d\delta x}{dt} \tag{398}$$

und, wenn wir jetzt die Annahme einführen, daß die Variationen der Koordinaten aller Punkte für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden, mit Rücksicht auf (396):

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x = -\frac{1}{2} \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \tag{399}$$

folglich durch Substitution in (395), nach (387):

$$\int_{t_0}^{t_1} dt(\delta H + A) = 0, \tag{400}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$H = L - U. \tag{401}$$

Die Gleichung (400) spricht das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung aus. Die Funktion H, nicht zu verwechseln mit der Energie E, heißt die Lagrangesche Funktion oder auch das kinetische Potential. Im Gegensatz zu dem Prinzip von d'Alembert, nach welchem die Bewegung durch die Anfangslagen und die Anfangsgeschwindigkeiten der Punkte bestimmt ist, wird nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung die Bewegung bestimmt durch die Anfangslagen ($t = t_0$) und die Endlagen ($t = t_1$) der Punkte. Denn diese sind es, welche bei allen verglichenen unendlich benachbarten Bewegungen festgehalten werden, während die Geschwindigkeiten, auch die Anfangsgeschwindigkeiten, innerhalb der vorgeschriebenen Bedingungen beliebig variiert werden können.

Die überragende Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung für die ganze Physik beruht einmal darauf, daß die in seiner Fassung vorkommenden Begriffe des Potentials und der äußeren Arbeit eine Bedeutung auch außerhalb der Mechanik besitzen, und außerdem darauf, daß das Prinzip nicht auf die Benutzung einer

bestimmten Art von Koordinaten zugeschnitten ist. Diese Umstände ermöglichen seine unmittelbare Anwendung auch auf elektrodynamische und thermodynamische Vorgänge, wo es sich überall bewährt hat.

§ 123. Betrachten wir ein einfaches Beispiel der Anwendung. Wie bewegt sich ein materieller Punkt ohne treibende Kraft auf einer festen Fläche? Nach (400) und (401) ist hierfür:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta L = 0,$$

oder:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \cdot dt = 0. \tag{402}$$

In Worten: Unter allen auf der Fläche möglichen Bewegungen, die den Punkt aus einer bestimmten Anfangslage in einer bestimmten Zeit $t_1 - t_0$ in eine bestimmte Endlage bringen, findet diejenige in der Natur wirklich statt, welche das Zeitintegral über die lebendige Kraft zu einem Minimum macht.

Dieser eine Satz ergibt sowohl die Form der Bahnkurve als auch die Geschwindigkeit, mit der sie durchlaufen wird. Denn mit Einsetzen des Wertes:

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

erhält man aus (402):

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot dt = 0,$$

oder, wenn man die Variation ausführt und dann partiell integriert:

$$\left[\frac{ds}{dt} \delta s\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d^2 s}{dt^2} dt \, \delta s = 0.$$

Da δs für jede Zwischenzeit beliebig ist, so folgt hieraus erstens, daß für alle Zeiten $\frac{d^2 s}{dt^2} = 0$, also die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = \text{const.}$ (§ 71) und zweitens, daß $\delta(s_1 - s_0) = 0$, wobei $s_1 - s_0$ die Länge der Bahnkurve bedeutet. Also ist die Bahn eine geodätische Linie der Fläche (§ 111).

§ 124. Wir wollen die bequeme Form des Hamiltonschen Prinzips jetzt dazu benutzen, um die Bewegungsgleichungen eines

Punktsystems von den geradlinigen rechtwinkligen Koordinaten auf beliebige andere Koordinaten zu transformieren. Denn in vielen Fällen empfiehlt es sich, statt der geradlinigen Koordinaten solche zu wählen, welche den vorgeschriebenen Bedingungen des Systems besser angepaßt sind, z. B. bei Drehungen den Drehungswinkel. Man braucht dann nur soviele Koordinaten zu nehmen, als Freiheitsgrade in dem System vorhanden sind, und kann dann diese Koordinaten, die wir $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ nennen wollen, als unabhängig voneinander ansehen. Immer sind die geradlinigen Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, \cdots$ bestimmte von vornherein bekannte Funktionen der φ, welche, wenn die vorgeschriebenen Bedingungen von der Zeit abhängig sind, auch die Zeit t explizite enthalten. Ist dies nicht der Fall, so sind die Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \cdots$ bestimmte homogene lineäre Funktionen der $\dot{\varphi}$, deren Koeffizienten aber von den φ abhängig sein können.

Da die Variationen $\delta x_1, \cdots$ jedenfalls homogene lineäre Funktionen der $\delta\varphi$ sind, so hat der Ausdruck der virtuellen äußeren Arbeit A in (400) die Form:

$$A = \Phi_1 \delta\varphi_1 + \Phi_2 \delta\varphi_2 + \cdots, \tag{403}$$

wo die Größen Φ durch die äußeren Kräfte gegeben sind und als die den allgemeinen Koordinaten φ entsprechenden äußeren „allgemeinen Kraftkomponenten“ bezeichnet werden.

Diese Definition der Kraft ist die allgemeinste, die sich überhaupt geben läßt, sie knüpft an den universellen Begriff der Arbeit, d. h. des Potentials, an und erstreckt ihre Bedeutung auf jede Art der Zustandsänderung, die durch Änderung einer Variabeln φ charakterisiert werden kann. Dabei ist bemerkenswert, daß die Dimension der allgemeinen Kraftkomponente sich nach der Dimension von φ richtet. Wenn z. B. φ ein Winkel ist, so ist Φ nach (327) ein Drehungsmoment.

Was ferner die Variation des kinetischen Potentials betrifft, so ist H eine bestimmte als bekannt anzusehende Funktion zweiten Grades der Größen $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \cdots$, deren Koeffizienten von $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ und möglicherweise von der Zeit t abhängen. Mithin, da die Zeit t nicht variiert wird:

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}_1}\delta\dot{\varphi}_1 + \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}_2}\delta\dot{\varphi}_2 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial \varphi_1}\delta\varphi_1 + \frac{\partial H}{\partial \varphi_2}\delta\varphi_2 +, \cdots. \tag{404}$$

Nun denke man sich die Ausdrücke (403) und (404) in (400) eingesetzt und alle vorkommenden Variationen auf die unabhängigen

Variationen $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\cdots$ zurückgeführt. Dies geschieht bei den Größen $\delta\dot{\varphi} = \delta\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\delta\varphi}{dt}$ durch eine partielle Integration, nach dem Schema:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi}\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}}\right) \delta\varphi \cdot dt,$$

da an den Grenzen des Integrals die Variation $\delta\varphi$, ebenso wie δx, $\cdots$ verschwindet.

Nachdem auf diese Weise jedes Glied hinter dem Integralzeichen von (400) eine der Variationen $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\cdots$ als Faktor erhalten hat, erfordert die Gültigkeit von (400) mit Rücksicht auf die gegenseitige Unabhängigkeit dieser Variationen, daß:

$$(405)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} = \Phi_1, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = \Phi_2, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot. \end{aligned}\right.$$

Dies sind die sogenannten Lagrangeschen Bewegungsgleichungen „zweiter Art“, im Gegensatz zu denen (384) erster Art.

§ 125. Als Beispiel bestimmen wir die Bewegungsgleichungen eines freien Punktes in Polarkoordinaten r, ϑ, φ. Die äußere Arbeit ist:

$$(405\text{a})\qquad A = R\delta r + \Theta\delta\vartheta + \Phi\delta\varphi,$$

wobei R, Θ, Φ die entsprechenden Kraftkomponenten bedeuten.

Das kinetische Potential ist, wenn keine potentielle Energie vorhanden ist, gleich der lebendigen Kraft L, und daher mit Rücksicht auf (92):

$$(405\text{b})\qquad H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2),$$

folglich die gesuchten Bewegungsgleichungen (405):

$$(405\text{c})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) = R, \\ &\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\vartheta}) - mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = \Theta, \\ &\frac{d}{dt}(mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}) = \Phi, \end{aligned}\right.$$

ein einfaches Resultat, das direkt aus (55) und (92) nur durch mühsame Rechnungen zu gewinnen wäre.

Auf entsprechendem Wege erhält man für Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z nach (159):

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m\dot{\varrho})-m\varrho\dot{\varphi}^2&=P,\\ \frac{d}{dt}(m\varrho^2\dot{\varphi})&=\Phi,\\ \frac{d}{dt}(m\dot{z})&=Z.\end{aligned}\right\}\quad(405\text{d})$$

§ 126. Wir wollen nun auch das Prinzip der lebendigen Kraft direkt aus den Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art ableiten und setzen daher von jetzt ab voraus, daß die Zeit t in dem Ausdruck des kinetischen Potentials H nicht explizite enthalten ist. Multiplizieren wir die Gleichungen (405) der Reihe nach mit $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \cdots$ und addieren, so ergibt sich für die in der Zeit dt von den äußeren Kräften geleistete Arbeit:

$$\Sigma\Phi_1\,d\varphi_1=A=\Sigma\left(\dot{\varphi}_1\cdot d\left(\frac{\partial H}{\partial\dot{\varphi}_1}\right)-\frac{\partial H}{\partial\varphi_1}\cdot d\varphi_1\right). \qquad (406)$$

Vergleicht man den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung mit dem vollständigen Differential:

$$dH=\Sigma\left(\frac{\partial H}{\partial\dot{\varphi}_1}d\dot{\varphi}_1+\frac{\partial H}{\partial\varphi_1}d\varphi_1\right),$$

so ersieht man, daß die beiden Ausdrücke zusammen addiert ergeben:

$$A+dH=\Sigma\left(\dot{\varphi}_1 d\left(\frac{\partial H}{\partial\dot{\varphi}_1}\right)+\frac{\partial H}{\partial\dot{\varphi}_1}d\dot{\varphi}_1\right),$$

und dies ist das vollständige Differential von:

$$\Sigma\dot{\varphi}_1\frac{\partial H}{\partial\dot{\varphi}_1}.$$

Mithin erhält man $A=dE$ oder die Gleichung der lebendigen Kraft, wenn gesetzt wird:

$$E=\Sigma\dot{\varphi}_1\frac{\partial H}{\partial\dot{\varphi}_1}-H. \qquad (407)$$

Die Übereinstimmung dieser Gleichung mit der in (401) gegebenen Definition des kinetischen Potentials ergibt sich sogleich, wenn man E durch $L+U$, H durch $L-U$ ersetzt und bedenkt, daß U nicht von den $\dot{\varphi}$ abhängt. Dann folgt nämlich:

$$L=\frac{1}{2}\sum\dot{\varphi}_1\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1}, \qquad (407\text{a})$$

eine Beziehung, die stets gilt, da L eine homogene Funktion zweiten Grades der $\dot{\varphi}$ ist.

Der hier in (407) neu auftretende Zusammenhang zwischen der Energie und dem kinetischen Potential besitzt eine wesentlich all-

gemeinere Bedeutung als der in (401) ausgedrückte. Denn die Gleichung (407) behält einen bestimmten Sinn auch in dem Falle, daß man die Energie E gar nicht in kinetische und potentielle Energie zerlegen kann, wie z. B. bei elektrodynamischen Vorgängen.

§ 127. Wie wir in § 75 und allgemeiner in § 118 gesehen haben, verliert das Prinzip der lebendigen Kraft seine Gültigkeit, wenn die vorgeschriebenen Bedingungen außer den Koordinaten auch die Zeit t explizite enthalten. Die Bewegungsgleichungen (405) behalten aber, wie aus der Art ihrer Ableitung hervorgeht, auch in diesem allgemeinen Falle ihre Gültigkeit. So ist für den schon wiederholt, im § 75 und § 117, betrachteten Fall der Bewegung eines Punktes auf einer mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gedrehten Geraden:

$$H = L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2),$$

also nach (405):

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\omega^2 = 0,$$

übereinstimmend mit (278b).

Als weiteres Beispiel behandeln wir die in einer vertikalen Ebene erfolgenden Schwingungen eines Pendels, dessen Länge l sich in bestimmter von vornherein gegebener Weise ändert. Dann ist l eine gegebene Funktion der Zeit, und wir erhalten, mit dem Elongationswinkel φ als einziger unabhängiger Koordinate, nach § 70:

$$L = \frac{m}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2), \qquad U = -mgl\cos\varphi + \text{const.},$$

folglich nach (401):

$$H = \frac{m}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2) + mgl\cos\varphi + \text{const.}$$

und nach (405) als Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) + mgl\sin\varphi = 0$$

oder:

$$2\dot{l}\dot{\varphi} + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0, \tag{408}$$

eine Gleichung, die sich von der (244) eines gewöhnlichen Pendels durch das Glied $2\dot{l}\dot{\varphi}$ unterscheidet.

Man kann den Rhythmus der Längenänderung so wählen, daß die Energie der Schwingung vorwiegend in einem bestimmten Sinn beeinflußt wird. Auf diesem Umstand beruht die Möglichkeit, sich selbst beliebig hoch zu schaukeln.

§ 128. Die in den Lagrangeschen Gleichungen (405) an erster Stelle auftretenden Größen:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}_1} = \psi_1, \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}_2} = \psi_2, \ldots \tag{409}$$

nennt man die den allgemeinen Koordinaten φ entsprechenden Bewegungsgrößen. Dieselben sind lineäre homogene Funktionen der Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}$, lassen sich also einfach durch diese ausdrücken, und umgekehrt. Den geradlinigen Koordinaten x, y, z entsprechen die Bewegungsgrößen $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$, wie sich unmittelbar aus dem Ausdruck von H ergibt.

Oft empfiehlt es sich, zur Charakterisierung des Zustandes neben den Koordinaten φ statt der Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ die Bewegungsgrößen ψ zu benutzen. Dann nehmen die Bewegungsgleichungen eine besonders einfache Form an, falls als charakteristische Funktion an Stelle des kinetischen Potentials H die Energie E in sie eingeführt wird. Denn schreibt man die Gleichung (406) für $A = dE$ in der Form:

$$dE = \Sigma\left(\dot{\varphi}_1 d\psi_1 - \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \cdot d\varphi_1\right)$$

und betrachtet darin E als Funktion der φ und ψ[1]), so folgt unmittelbar daraus:

$$\frac{\partial E}{\partial \psi_1} = \dot{\varphi}_1, \quad \frac{\partial E}{\partial \psi_2} = \dot{\varphi}_2, \cdots \tag{410}$$

und

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \varphi_1}\right)_\psi = -\left(\frac{\partial H}{\partial \varphi_1}\right)_{\dot{\varphi}}, \quad \left(\frac{\partial E}{\partial \varphi_2}\right)_\psi = -\left(\frac{\partial H}{\partial \varphi_2}\right)_{\dot{\varphi}}, \cdots \tag{411}$$

Die beigefügten Indizes sollen bedeuten, daß E bei konstanten ψ, dagegen H bei konstanten $\dot{\varphi}$ zu differentiieren ist.

Mit Benutzung der letzten Beziehungen lassen sich die Gleichungen (405) folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{d\varphi_1}{dt} = \dfrac{\partial E}{\partial \psi_1}, & \dfrac{d\psi_1}{dt} = -\dfrac{\partial E}{\partial \varphi_1} + \Phi_1, \\ \dfrac{d\varphi_2}{dt} = \dfrac{\partial E}{\partial \psi_2}, & \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\dfrac{\partial E}{\partial \varphi_2} + \Phi_2, \\ \cdots & \cdots \end{array}\right\} \tag{412}$$

und werden dann als die „Hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen" bezeichnet. Aus ihnen ergeben sich, wenn neben den

1) Hier werden also die φ und ψ nicht mehr als Funktionen der einen Variabeln t, sondern als unabhängige Variabeln angenommen. Die Berechtigung hierzu ergibt sich aus dem Umstand, daß die Gleichung für alle beliebigen Kräfte, also für jede beliebige Zustandsänderung des Punktsystems gültig ist.

äußeren Kräften die Energie E als Funktion der φ und ψ gegeben ist, alle φ und ψ als Funktionen der Zeit t und derjenigen Konstanten, die sich auf den Anfangszustand beziehen.

Auch das Energieprinzip folgt wieder unmittelbar aus den Gleichungen (412), wenn man mit ihrer Hilfe den Ausdruck für das vollständige Differential dE bildet.

Für ein abgeschlossenes System reduzieren sich die Bewegungsgleichungen (412) auf:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \psi_1}, \cdots \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial \varphi_1}, \cdots \tag{413}$$

§ 128a. Eine allgemeine Methode zur Integration der für ein abgeschlossenes System gültigen Bewegungsgleichungen (413) läßt sich ableiten aus einer näheren Untersuchung des im Hamiltonschen Prinzip auftretenden „Wirkungsintegrals“:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} H\,dt. \tag{414}$$

Diese Größe besitzt für die wirkliche Bewegung, bei gegebener Anfangslage und Endlage des Systems, einen ganz bestimmten Wert, der nach (400) dadurch charakterisiert ist, daß für jede Variation der Bewegung:

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \delta H \cdot dt = 0. \tag{415}$$

Fragen wir nun zunächst, welchen Wert δW annimmt, wenn man auch die Anfangslage und die Endlage des Systems, d. h. die Anfangs- und die Endwerte der Koordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ variiert, während die Zeit t nach wie vor unvariiert bleibt. Die Antwort auf diese Frage erhält man durch Berechnung von δW auf Grund der Gleichung (404), genau auf dem dort eingeschlagenen Wege, mittelst partieller Integration, indem nur der Umstand berücksichtigt wird, daß die Variationen $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \cdots$ an den Grenzen des Integrals jetzt nicht verschwinden. So ergibt sich, bei Benutzung der Bewegungsgleichungen (405) für das abgeschlossene System ($\Phi = 0$)

$$\delta W = \sum \left[\frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}_1} \delta\varphi_1\right]_{t_0}^{t_1} = \sum \left[\psi_1 \delta\varphi_1\right]_{t_0}^{t_1}. \tag{416}$$

Nach dem Obigen können wir W als bestimmte Funktion der Anfangskoordinaten, der Endkoordinaten und der Zeiten t_0 und t_1

betrachten. Nennen wir die Anfangskoordinaten $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \cdots$, die Endkoordinaten von jetzt ab kurz $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$, so ist, da die Zeit unvariiert bleibt:

$$\delta W = \sum \frac{\partial W}{\partial \varphi_1^0} \delta \varphi_1^0 + \sum \frac{\partial W}{\partial \varphi_1} \delta \varphi_1$$

und es folgt durch Vergleichung mit (416):

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi_1} = \psi_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi_2} = \psi_2, \cdots \tag{417}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi_1^0} = -\psi_1^0, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi_2^0} = -\psi_2^0, \cdots \tag{418}$$

Wir wollen jetzt auch die Abhängigkeit des Wirkungsintegrals W von der Zeit t_1 in Betracht ziehen, die wir von nun ab kurz mit t bezeichnen. Hierfür ergibt sich zunächst aus (414):

$$\frac{dW}{dt} = H, \tag{419}$$

wobei die Differentiation von W als „totale" zu vollziehen ist, d. h. so, daß die Koordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ sich mit der Zeit t nach Maßgabe der wirklichen Bewegung ändern, während die Anfangskoordinaten $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \cdots$ ebenso wie t_0 konstant gehalten werden; d. h. es ist:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial \varphi_1} \cdot \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial W}{\partial \varphi_2} \cdot \dot{\varphi}_2 + \cdots,$$

wo nun $\frac{\partial W}{\partial t}$ sich auf die „partielle" Differentiation, bei konstant gehaltenen Koordinaten, bezieht. Mit Berücksichtigung von (417) und (419) ergibt die letzte Gleichung:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \psi_1 \dot{\varphi}_1 + \psi_2 \dot{\varphi}_2 + \cdots - H = 0,$$

oder nach (409) und (407):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + E = 0.$$

Betrachten wir hier die Energie E, wie in (413), als bekannte Funktion der φ und ψ, was wir durch die Bezeichnung $E_{\varphi,\psi}$ andeuten wollen, und ersetzen weiter die Impulskoordinaten ψ darin durch ihre Werte (417), so lautet die letzte Beziehung:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + E_{\varphi, \frac{\partial W}{\partial \varphi}} = 0. \tag{420}$$

Sie zeigt, daß das Wirkungsintegral W, als Funktion von $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \cdots, t, t_0$ aufgefaßt, einer bestimmten partiellen Differential-

gleichung genügt, — der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung.

§ 128b. Ebenso wie aus dem Ausdruck des Wirkungsintegrals W für eine bestimmte Bewegung die Gültigkeit der Differentialgleichung (420) abgeleitet werden kann, so läßt sich auch umgekehrt durch Integration von (420) eine Funktion W finden, welche das Wirkungsintegral einer Bewegung darstellt, und zwar ergibt sich durch eine nähere Betrachtung, daß jedes Integral W jener Differentialgleichung, welches außer den Variabeln $\varphi_1, \varphi_2, \cdots t$ und der additiven Integrationskonstanten noch ebensoviel Integrationskonstanten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ enthält, als das betrachtete System Freiheitsgrade besitzt, die allgemeine Integration der Bewegungsgleichungen (413) liefert. Setzt man nämlich, angenommen daß eine solche Funktion W gefunden ist, nach (417):

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi_1} = \psi_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi_2} = \psi_2, \cdots \tag{421}$$

und nach (418):

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \cdots \tag{422}$$

so sind dies im ganzen, bei n Freiheitsgraden, $2n$ Gleichungen, welche dazu dienen können, um die $2n$ Variabeln $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \psi_1, \psi_2, \cdots$ als Funktionen der Zeit t und der $2n$ Integrationskonstanten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \beta_1, \beta_2, \cdots$ der Bewegungsgleichungen (413) zu berechnen.

Daß in der Tat bei Gültigkeit von (420), (421) und (422) auch die Bewegungsgleichungen (413) befriedigt werden, läßt sich leicht direkt auf folgende Weise zeigen. Differentiieren wir zunächst die erste Gleichung (422) „total" nach t, so ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right) = 0,$$

oder:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial t} + \sum_i \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt} = 0, \tag{423}$$

indem die Summation über i von 1 bis n zu erstrecken ist. Ganz ebenso folgen noch $n-1$ weitere Gleichungen, welche mit (423) zusammen die n Geschwindigkeitsgrößen $\dot{\varphi}$ eindeutig zu berechnen gestatten.

Andererseits ergibt sich durch Differentiation von (420) nach α_1, mit Benutzung von (421):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial t} + \sum_i \frac{\partial E}{\partial \psi_i} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \varphi_i} = 0, \tag{424}$$

und entsprechend die $n-1$ übrigen Gleichungen, so daß sich aus diesen n Gleichungen die n Größen $\frac{\partial E}{\partial \psi}$ eindeutig bestimmen lassen. Nun sind aber die Koeffizienten in den Gleichungssystemen (423) und (424), die partiellen zweiten Differentialquotienten von W, vollkommen identisch. Daraus folgt, daß auch die n Wurzeln der Gleichungen identisch sind, d. h. daß für jedes i:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \psi_i}, \tag{425}$$

und damit ist die erste Hälfte der Bewegungsgleichungen (413) befriedigt.

Was die zweite Hälfte betrifft, so folgt durch Differentiation von (420) nach φ_1:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_1 \partial t} + \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} + \sum \frac{\partial E}{\partial \psi_i} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_i \partial \varphi_1} = 0$$

oder nach (425):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_1 \partial t} + \sum_i \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt} + \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0$$

oder endlich:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_1}\right) + \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0,$$

woraus sich nach (421) die Gültigkeit der fraglichen Gleichungen ergibt.

Obgleich der Form nach verwandt, sind die Gleichungen (422) doch wesentlich allgemeiner als die Gleichungen (418), weil die Konstanten α nicht die Anfangswerte der Koordinaten φ zu sein brauchen.

§ 128c. Da in der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung (420) die Zeit nur als Differential vorkommt, so läßt sie ein Integral zu von der Form:

$$W = -\alpha_1 t + V, \tag{426}$$

wobei V nur von den Koordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ und den Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ abhängt. Denn man erhält dann für die Funktion V die Bedingung:

$$E_{\varphi, \frac{\partial V}{\partial \varphi}} - \alpha_1 = 0. \tag{427}$$

Hier stellt also die Konstante α_1 die Gesamtenergie des Systems vor. Die Gleichungen (421) und (422) gehen dann über in:

(428) $$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = \psi_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = \psi_2, \cdots$$

und:

(429) $$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \cdots$$

Die Integration von (427) gelingt manchmal durch Separation der Variabeln, nämlich dann, wenn die linke Gleichungsseite sich darstellen läßt als eine Funktion von n Argumenten, deren jedes nur von einer einzigen Koordinate φ_i und dem entsprechenden Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial \varphi_i}$ abhängt. Dann kann man jedes einzelne Argument gleich einer Konstanten α setzen, ferner

(430) $$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$$

annehmen, wo jede der Größen $V_1, V_2, \cdots$ nur von einer einzigen Koordinate $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ abhängt, also:

(431) $$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial V_1}{\partial \varphi_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial V_2}{\partial \varphi_2}, \cdots$$

und erhält so für jede dieser Funktionen eine besondere Differentialgleichung, die durch Quadratur lösbar ist.

§ 128d. Als ein einfaches Beispiel für die Anwendung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung betrachten wir die schon im § 52f. behandelte Planetenbewegung, mit Benutzung der dortigen Bezeichnungen. Dann haben wir zwei Freiheitsgrade:

$$\varphi_1 = r, \quad \varphi_2 = \varphi,$$

ferner die Energie als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten:

(432) $$E = L + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{fm\mu}{r},$$

das kinetische Potential:

(433) $$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{fm\mu}{r},$$

die Impulskoordinaten:

(434) $$\psi_1 = \frac{\partial H}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \psi_2 = \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi},$$

die Energie als Funktion der Koordinaten und Impulse:

(435) $$E = \frac{1}{2m}\psi_1^2 + \frac{1}{2mr^2}\psi_2^2 - \frac{fm\mu}{r}.$$

Daher lautet hier die Differentialgleichung (427):

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{fm\mu}{r} = \alpha_1. \tag{436}$$

Dieselbe läßt sich dadurch integrieren, daß nach (430) gesetzt wird:

$$V = V_1 + V_2 \tag{437}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} = \alpha_2$$

und infolgedessen:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V_1}{\partial r} = \sqrt{2m\alpha_1 + \frac{2fm^2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}.$$

Dann ergibt sich, mit Weglassung der bedeutungslosen additiven Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= \alpha_2 \varphi \\ V_1 &= \int \sqrt{2m\alpha_1 r^2 + 2fm^2\mu r - \alpha_2^2} \cdot \frac{dr}{r} \end{aligned}\right\} \tag{438}$$

und aus (428), (429), (434) und (437):

$$\psi_1 = m\dot{r} = \frac{\partial V_1}{\partial r} = \sqrt{2m\alpha_1 + \frac{2fm^2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}. \tag{439}$$

$$\psi_2 = mr^2\dot{\varphi} = \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} = \alpha_2, \tag{440}$$

$$t + \beta_1 = \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} = \int \frac{mr \cdot dr}{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 + 2fm^2\mu r - \alpha_2^2}}, \tag{441}$$

$$\beta_2 = \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2} + \varphi = \varphi - \int \frac{\alpha_2 \cdot dr}{r\sqrt{2m\alpha_1 r^2 + 2fm^2\mu r - \alpha_2^2}}$$

$$= \varphi - \arccos \frac{\alpha_2^2 - fm^2\mu r}{r\sqrt{f^2m^4\mu^2 + 2m\alpha_1\alpha_2^2}}. \tag{442}$$

Diese vier Gleichungen erweisen sich auch in formaler Beziehung als völlig identisch mit den Gleichungen des § 53, wenn gesetzt wird:

$$\alpha_1 = \frac{mc}{2}, \quad \alpha_2 = mc', \quad \beta_2 = c''.$$

§ 129. In der Natur ist uns weder der Ausdruck für die Energie, noch der für das kinetische Potential unmittelbar gegeben. Daher ist es für die Anwendungen der Theorie von größter Bedeutung, daß noch ein weiterer Satz von großer Allgemeinheit

Gültigkeit besitzt: Das Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion. Wir haben dieses Prinzip bisher nur für ruhende Punktsysteme eingeführt und benutzt. Auch läßt sich die Betrachtung, durch welche wir seine Gültigkeit in der Natur plausibel machten (§ 29), nicht auf beliebig bewegte Punkte anwenden, deren Entfernung mit der Zeit veränderlich ist, insbesondere wenn nichtkonservative Kräfte, wie Reibung, in Betracht kommen.

Daher ist es doppelt wichtig, sich davon zu überzeugen, daß das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung in engem Zusammenhang steht mit dem universellen Energieprinzip, und zwar durch die Vermittlung des Prinzips der Relativität (§ 59).

Denken wir uns nämlich zwei materielle Punkte 1 und 2, zwischen denen irgendwelche Kräfte wirken, in beliebiger Bewegung begriffen. Dann ist nach (147) die in der Zeit dt eintretende Änderung der Summe ihrer lebendigen Kräfte:

$$\begin{aligned} dL = X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 \\ + X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2 . \end{aligned} \tag{443}$$

Nun besagt das Prinzip der Relativität, daß diese Größe dL ungeändert bleibt, wenn man von dem ruhenden Koordinatensystem mittelst der Gleichungen (194) auf ein gleichförmig bewegtes Koordinatensystem übergeht, und zwar ohne Rücksicht darauf, ob die Kräfte ein Potential haben oder nicht. Denn das Relativitätsprinzip gilt nicht nur für mechanische, sondern für alle physikalischen Vorgänge, z. B. auch für die Verwandlung mechanischer Energie in Wärme, d. h. der Betrag der in Wärme verwandelten mechanischen Energie ist unabhängig von einer gleichförmigen Bewegung des Koordinatensystems.

Daher erhält man für die bezeichnete Koordinatentransformation aus (443) die Beziehung:

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_2 dx_2 + \cdots = X_1' dx_1' \cdots + X_2' dx_2' + \cdots$$

und mit Rücksicht auf (192) und (194):

$$X_1 dx_1 \cdots + X_2 dx_2 + \cdots = X_1(dx_1 - u_0 dt) \cdots + X_2(dx_2 - u_0 dt) + \cdots$$

oder:

$$(X_1 + X_2) u_0 + (Y_1 + Y_2) v_0 + (Z_1 + Z_2) w_0 = 0,$$

eine Beziehung, die für beliebige u_0, v_0, w_0 nur dann erfüllt ist, wenn ganz allgemein:

$$X_1 = -X_2, \quad Y_1 = -Y_2, \quad Z_1 = -Z_2, \tag{444}$$

wie es dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung entspricht.

§ 130. Die volle Bedeutung und Fruchtbarkeit des letztgenannten Prinzips kommt dann zur Geltung, wenn wir nun wieder, ebenso wie früher in der Statik (§ 112), alle in einem System materieller Punkte wirksamen Kräfte einteilen in *innere* und *äußere* Kräfte. Nehmen wir dann noch das *d'Alembertsche* Prinzip (§ 66) hinzu, so können wir ohne weiteres den folgenden Satz aussprechen:

Bei jeder Bewegung eines Systems materieller Punkte halten sich in jedem Augenblick die äußeren Kräfte und die Trägheitswiderstände an dem starr gedachten System im Gleichgewicht.

Um diesen fundamentalen Satz in eine analytische Form zu kleiden, bezeichnen wir die äußeren Kräfte (treibende Kräfte oder Zwangskräfte) mit $\mathfrak{F}_a$. Dann folgt gemäß den Gleichgewichtsbedingungen (306) eines starren Körpers:

$$\Sigma(\mathfrak{F}_a - m\ddot{\mathfrak{r}}) = 0\,. \tag{445}$$

$$\Sigma[\mathfrak{r}, (\mathfrak{F}_a - m\ddot{\mathfrak{r}})] = 0\,. \tag{446}$$

Diese sechs Gleichungen bilden den gemeinsamen Ausgangspunkt für die gesamte Mechanik der starren, festen, flüssigen und gasförmigen Körper. Wir prüfen ihren Inhalt zunächst durch einige allgemeinere Anwendungen.

§ 131. Die Gleichungen (445) nehmen eine sehr einfache Form an, wenn man nach (287) die Lage des *Schwerpunktes* in die Betrachtung einführt.

Darnach ist nämlich durch zweimalige Differentiation nach der Zeit t:

$$\ddot{\;}_0\,\Sigma m = \Sigma m\ddot{\mathfrak{r}}, \tag{447}$$

und die Gleichung (445) lautet:

$$\ddot{\mathfrak{r}}_0 \cdot \Sigma m = \Sigma \mathfrak{F}_a\,, \tag{448}$$

d. h. der Schwerpunkt eines Systems materieller Punkte bewegt sich so, als ob in ihm die ganze Masse des Systems vereinigt wäre und als ob alle äußeren Kräfte an ihm angriffen. Bei der Bewegung des Schwerpunktes spielen also die inneren Kräfte überhaupt keine Rolle.

Schleudert man z. B. irgendeinen festen oder flüssigen Körper

frei empor, so bewegt sich sein Schwerpunkt in derjenigen Parabel, welche ihm durch die Anfangsbedingungen vorgeschrieben ist, sofern keine andere äußere Kraft als das Gewicht der einzelnen Körperteile in Betracht kommt.

Auch eine Explosion des Körpers kann diese parabolische Bahn nicht stören, solange bis einer der Splitter auf ein äußeres Hindernis trifft. Ebenso würde die Explosion eines Planeten an sich seinen Schwerpunkt nicht hindern, seine elliptische Bewegung um die Sonne weiter fortzusetzen.

Nur eine äußere Kraft vermag dem Schwerpunkt eines Körpers eine Beschleunigung zu erteilen.

Auf einer absolut glatten horizontalen Fläche vermöchte auch der stärkste Mann nicht, sich von der Stelle fortzubewegen, wenn er anfangs ruht, oder anzuhalten, wenn er sich in Bewegung befindet. Man erkennt hieraus die wichtige Bedeutung, welche die Reibung des Erdbodens, des Straßenpflasters, der Eisenbahnschienen für die Fortbewegung schwerer Lasten besitzt. Wenn ein Pferd einen Wagen anzieht, so wirkt die Kraft der gespannten Stränge mit der nämlichen Größe (nicht etwa stärker) auf den Wagen nach vorwärts, wie auf das Pferd nach rückwärts, aber für den Wagen ist dies die einzige äußere in Betracht kommende Kraft, während für das Pferd noch die Reibung wirksam ist, die seine angestemmten Hufe an dem Erdboden erfahren, welche nach vorwärts wirkt und mindestens so stark sein muß, daß sie die Spannung der Stränge überwindet.

Auch die früher im § 82 aufgeworfene und damals unerledigt gebliebene Frage, in welche Bewegung ein ruhender starrer Körper durch ein Kräftepaar versetzt wird, findet hier den ersten Teil ihrer Beantwortung. Denn nach der Gleichung (448) bleibt der Schwerpunkt des Körpers in Ruhe. Die Bewegung ist also eine Drehung um den Schwerpunkt. Nun darf man aber nicht glauben, daß die Drehungsachse immer mit der Achse des Kräftepaares zusammenfällt. Diesen Zusammenhang werden wir erst später (§ 149) kennen lernen.

§ 132. Wenn gar keine äußeren Kräfte wirken, oder wenn die äußeren Kräfte der Gleichung $\Sigma \mathfrak{F}_a = 0$ genügen, so ist nach (448) $\ddot{\mathfrak{r}}_0 = 0$, d. h. der Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig und geradlinig (Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes).

Man kann diesen Satz auch formulieren durch Einführung der

Bewegungsgrößen (§ 128), indem man das Integral von $\Sigma m \ddot{\mathfrak{r}} = 0$ in der Form schreibt:

$$\Sigma m \dot{\mathfrak{r}} = \Sigma m \mathfrak{q} = \text{const.} \tag{449}$$

Man bezeichnet diesen im vorliegenden Falle nach Größe und Richtung konstanten Vektor als die „resultierende Bewegungsgröße" des Punktsystems. Dieselbe setzt sich aus den Bewegungsgrößen der einzelnen Punkte ebenso zusammen wie eine resultierende Kraft aus einzelnen Kräften. Die Gleichung (449) spricht dann den Satz der Erhaltung der Bewegungsgröße (oder der Impulsgröße) aus. Ein charakteristischer Unterschied dieses Erhaltungssatzes gegen den der Energie besteht darin, daß die Bewegungsgröße ein Vektor, die Energie aber ein Skalar ist, weshalb die Erhaltung der Bewegungsgröße durch drei Gleichungen ausgedrückt wird, gegenüber der einen Gleichung der Erhaltung der Energie.

Als ein Beispiel mag der mit der Abfeuerung eines Geschützes verbundene Rückstoß dienen, bei welchem das Geschoß und das Geschütz mit gleichen und entgegengesetzt gerichteten Bewegungsgrößen auseinanderfahren, da die resultierende Bewegungsgröße Null war und Null bleibt, so lange keine äußere Kraft ins Spiel kommt.

§ 133. Als weiteres Beispiel für den Satz der Erhaltung der Bewegungsgröße behandeln wir die Gesetze des Stoßes zweier auf der nämlichen Geraden, der x-Achse, sich bewegenden materiellen Punkte 1 und 2. Ihre Koordinaten seien x_1 und $x_2 > x_1$, ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoß u_1 und u_2. Damit überhaupt ein Zusammenstoß stattfindet, muß sein:

$$u_1 > u_2, \tag{450}$$

wobei die Größen u positiv oder negativ sein können.

Der Stoß ist ein sehr verwickelter Vorgang; es treten dabei starke Kräfte in Tätigkeit, die aber nur kurz andauern und dabei in hohem Grade von der materiellen Beschaffenheit der Punkte abhängen. Um so wichtiger ist, daß sich aus der allgemeinen Mechanik weitgehende Gesetzmäßigkeiten für die Größe der Geschwindigkeiten nach dem Stoß ableiten lassen.

Bei der Abwesenheit jeglicher äußeren Kraft gilt nämlich für das System der beiden materiellen Punkte nach § 132 der Satz der Erhaltung der Bewegungsgröße:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u_1' + m_2 u_2'. \tag{451}$$

wenn u_1' und u_2' die Geschwindigkeiten nach dem Stoß bedeuten. Zur eindeutigen Bestimmung von u_1' und u_2' reicht freilich diese eine Gleichung nicht aus; hierfür bedarf es noch einer weiteren Bedingung, die je nach der materiellen Beschaffenheit der Punkte verschieden lauten wird. Nur die folgende Ungleichung muß unter allen Umständen erfüllt sein:

$$u_1' \leqq u_2', \tag{452}$$

da doch die Punkte als undurchdringlich vorausgesetzt sind.

Wir betrachten nun unter allen möglichen Fällen diejenigen beiden, welche als ideale Grenzfälle besonders von Interesse sind.

§ 134. Unelastischer Stoß. Als vollkommen unelastisch bezeichnet man den Stoß, wenn die beiden Punkte nicht voneinander abprallen, sondern mit gemeinsamer Geschwindigkeit ihren Weg fortsetzen. Daher gilt hierfür:

$$u_1' = u_2' = u' \tag{453}$$

und nach (451)

$$u' = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}. \tag{454}$$

Sind die Massen gleich, so ist die Geschwindigkeit nach dem Stoß das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten vor dem Stoß. Sind die Bewegungsgrößen gleich und entgegengesetzt, so ist die gemeinsame Endgeschwindigkeit Null.

Beim unelastischen Stoß geht stets mechanische Energie verloren. Berechnen wir den Betrag dieses Verlustes. Die Differenz der lebendigen Kräfte der beiden Punkte vor und nach dem Stoße ist:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 - (m_1 + m_2) u'^2\right)$$

oder nach (454):

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2, \tag{455}$$

also in der Tat positiv.

Nach dem universellen Energieprinzip wird dafür ein entsprechender Betrag von molekularer Energie gewonnen, in der Form von Wärme, Deformation, Elektrizität.

Der Umstand, daß diese Energieverwandlung stets einseitig erfolgt, in der Richtung einer Abnahme der lebendigen Kraft der Bewegung, ebenso wie bei der Reibung, deutet schon hier auf das Walten eines dem Energieprinzip an sich fremden universellen

Naturgesetzes hin, das in dem „zweiten Hauptsatz" der Wärmetheorie seinen exakten Ausdruck gefunden hat.

§ 135. Elastischer Stoß. Der Stoß heißt vollkommen elastisch, wenn die beiden materiellen Punkte durch den Stoß nur vorübergehende, aber keine dauernden Änderungen ihrer molekularen Beschaffenheit, also weder eine Erwärmung, noch eine bleibende Deformation, noch sonst eine Änderung ihrer molekularen Energie erleiden.

Dann ist nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie die Summe der lebendigen Kräfte der Punkte, als der einzigen Energieart, die hier in Betracht zu ziehen ist, nach dem Stoß gleich derjenigen vor dem Stoß, also:

$$\frac{1}{2}\left(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(m_1 u_1'^2 + m_2 u_2'^2\right) \tag{456}$$

oder:

$$m_1(u_1^2 - u_1'^2) = m_2(u_2'^2 - u_2^2)$$

und mit Division durch die entsprechend umgestellte Gleichung (451):

$$u_1 + u_1' = u_2' + u_2\,, \tag{457}$$

woraus sich dann mit (451) die Werte ergeben:

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= \frac{(m_1 - m_2)\,u_1 + 2\,m_2 u_2}{m_1 + m_2} \\ u_2' &= \frac{2 m_1 u_1 - (m_1 - m_2)\,u_2}{m_1 + m_2}\,, \end{aligned}\right\} \tag{458}$$

welche in der Tat die Ungleichung (452) erfüllen, wenn man (450) berücksichtigt.

Sind die Massen einander gleich, so wird $u_1' = u_2$ und $u_2' = u_1$ d. h. die Geschwindigkeiten tauschen sich einfach aus. Ist m_2 sehr groß gegen m_1, $(m_2 >> m_1)$, so erhält man mittelst Division im Zähler und Nenner durch m_2:

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= -u_1 + 2\,u_2 \\ u_2' &= u_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{459}$$

Dieser Fall entspricht der elastischen Reflexion eines materiellen Punktes, der mit der Geschwindigkeit u_1 gegen eine mit der Geschwindigkeit u_2 sich bewegende Wand prallt. Ist $u_2 = 0$, so prallt der Punkt von der ruhenden Wand mit der nämlichen Geschwindigkeit u_1 zurück, ist $u_2 = \frac{u_1}{2}$. so kommt der Punkt

dauernd zur Ruhe, ist $u_2 > \frac{u_1}{2}$, so folgt der Punkt der Wand in allmählich wachsender Entfernung. Daß hierbei das Prinzip der Erhaltung der Energie gewahrt wird, trotzdem die Geschwindigkeit des Punktes sich ändert, während die der Wand wesentlich ungeändert bleibt, dafür bürgt die Gleichung (456).

§ 136. Der Vorgang des Stoßes hat den Anlaß gegeben zur Einführung des Begriffs der Momentankräfte. Das sind solche Kräfte, die nur während einer äußerst kurzen Zeit τ von Null verschieden sind, aber innerhalb dieser Zeit eine solche Größe besitzen, daß sie eine merkliche Geschwindigkeitsänderung hervorbringen. Um die für eine Momentankraft charakteristischen Merkmale zu finden, nehmen wir in den allgemeinen Gleichungen (412) die äußeren Kraftkomponenten $\Phi_1, \Phi_2, \cdots$ als Momentankräfte an, die von der Zeit t bis zur Zeit $t+\tau$ wirken, und integrieren die auf die Koordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ bezüglichen Gleichungen über t von t bis $t+\tau$. Dann ergibt sich, wenn wir die auf den Zeitpunkt $t+\tau$ bezogenen Werte mit einem beigefügten Strich bezeichnen:

$$\varphi_1' - \varphi_1 = 0, \quad \psi_1' - \psi_1 = \int_t^{t+\tau} \Phi_1 dt, \text{ usw.} \tag{460}$$

Denn wegen der Kleinheit von τ verschwinden diejenigen Zeitintegrale, welche über endliche Größen zu erstrecken sind. Während also die Koordinaten φ selber durch die Momentankräfte nicht merklich geändert werden, wie auch unmittelbar verständlich ist, da die Geschwindigkeiten stets endlich bleiben, erleiden die Bewegungsgrößen (und mit ihnen die Geschwindigkeiten) einen Sprung, dessen Größe durch das Zeitintegral der betreffenden Momentankraft dargestellt wird. Dieses Zeitintegral ist also charakteristisch für die Wirkung der Momentankraft, es wird als „Antrieb“ oder „Impuls“ $i_1, i_2, \cdots$ der Kraft bezeichnet.

Wenn man, wie in § 128 geschildert, zur Charakterisierung des Zustandes eines Punktsystems neben den Koordinaten φ statt der Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ die Bewegungsgrößen ψ benutzt, so kann man sich diese Bewegungsgrößen in anschaulicher Weise erzeugt denken durch Momentankräfte, deren Impulse dann den Größen ψ gleich sind. Daher nennt man die Bewegungsgrößen ψ manchmal auch direkt Impulskoordinaten.

Für die Impulse gilt, wie für alle Arten von Kräften, das Prinzip der Aktion und Reaktion, d. h. jedem Impuls, der von einem materiellen Punkt auf einen andern ausgeübt wird, entspricht ein gleich großer und entgegengesetzter von dem zweiten Punkt auf den ersten.

Berechnen wir nun auch die von den Momentankräften geleistete Arbeit A. Dieselbe ist gleich der Änderung der Energie E, oder, was hier dasselbe ist, der lebendigen Kraft L, weil die potentielle Energie durch die Momentankräfte nach (460) nicht merklich geändert wird. Also:

$$A = L' - L,$$

und nach (407a) und (409)

$$A = \frac{1}{2}\sum \dot{\varphi}_1' \psi_1' - \frac{1}{2}\sum \dot{\varphi}_1 \psi_1.$$

Nun ist aber, da L eine ganze homogene quadratische Funktion der $\dot{\varphi}$ (und der ψ) ist, wegen (409):

$$\Sigma \dot{\varphi}_1' \psi_1 = \Sigma \dot{\varphi}_1 \psi_1', \tag{461}$$

folglich kann man auch schreiben:

$$A = \frac{1}{2}\sum (\dot{\varphi}_1' + \dot{\varphi}_1) \cdot (\psi_1' - \psi_1)$$

oder:

$$A = \sum \frac{\dot{\varphi}_1' + \dot{\varphi}_1}{2} \cdot i_1, \tag{462}$$

d. h. die Arbeit der Momentankräfte ergibt sich durch Multiplikation der Impulse mit dem arithmetischen Mittel der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß.

Der Vorteil der Einführung der Momentankräfte zeigt sich z. B. bei der Ableitung der in § 135 behandelten Gesetze des elastischen Stoßes. Denn hierfür ist nach (462):

$$\frac{u_1' + u_1}{2} i_1 + \frac{u_2' + u_2}{2} i_2 = 0.$$

Andererseits ist nach dem Reaktionsprinzip:

$$i_1 + i_2 = 0,$$

und daraus folgt die Gleichung (457) auf einfacherem Wege als früher.

§ 137. Wir wollen nun auch die allgemeine Gleichung (446) einer näheren Betrachtung unterziehen, und schreiben dieselbe zu diesem Zwecke in der Form:

$$\Sigma[\mathfrak{r}, m\ddot{\mathfrak{r}}] = \Sigma[\mathfrak{r}, \mathfrak{F}_a]. \tag{463}$$

Nehmen wir zunächst den speziellen Fall, daß die rechte Gleichungsseite verschwindet, wie wenn gar keine äußeren Kräfte wirken, also:

$$\Sigma[\mathfrak{r}, m\ddot{\mathfrak{r}}] = 0.$$

Dann läßt sich diese Vektorgleichung wie (157a) integrieren und liefert:

(464) $$\Sigma[\mathfrak{r}, m\dot{\mathfrak{r}}] = \text{const.}$$

Man bezeichnet ein einzelnes Glied dieser Summe als das „Moment der Bewegungsgröße" oder als das „Impulsmoment" des betreffenden Massenpunktes in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt, und die ganze Summe als das „resultierende Moment" aller Bewegungsgrößen in bezug auf diesen Punkt. Die Bezeichnung, das Bildungsgesetz und die Zusammensetzung der Impulsmomente entsprechen nach den §§ 85 bis 88 genau den für die Momente von Kräften gültigen Sätzen. Die Richtung des Vektors (464) heißt dementsprechend die „Achse" des resultierenden Moments.

Eine anschauliche kinematische Bedeutung gewinnt die Gleichung (464), wenn man bedenkt, daß nach den Betrachtungen in § 50 die Projektion des resultierenden Moments auf irgendeine durch den Koordinatenanfangspunkt gelegte Ebene, d. h. die Komponente des Vektors (464) in Richtung der Normalen dieser Ebene, gleich ist der algebraischen Summe der mit den Massen multiplizierten doppelten „Flächengeschwindigkeiten" der einzelnen Punkte, die gemessen werden durch die von den Radiivektoren der Punkte in der betreffenden Ebene beschriebenen Flächen, positiv oder negativ, je nach dem Sinne der einzelnen Drehungen. Wenn die gewählte Ebene durch die Achse des resultierenden Moments hindurchgeht, so ist die algebraische Summe der mit den Massen multiplizierten doppelten Flächengeschwindigkeiten gleich Null, weil die Komponente eines Vektors in einer zu seiner Richtung rechtwinkligen Richtung verschwindet; steht die Ebene aber senkrecht zur Achse, so ist jene Summe ein Maximum, und zwar gleich dem absoluten Betrag des resultierenden Moments (464). Diese ausgezeichnete, für alle Zeiten im Raume feste Ebene führt daher auch den Namen „invariable Ebene", und der durch die Gleichung (464) ausgedrückte Satz den Namen „Prinzip der Flächen".

Ist die Konstante in (464) gleich Null, so verschwindet das resultierende Impulsmoment für alle Zeiten. Doch läßt sich hieraus nicht, wie oben in § 132 bei der Bewegungsgröße, ein Erhaltungs-

gesetz ableiten, weil die Gleichung nicht allgemein nach der Zeit integriert werden kann. Daher vermag z. B. eine auf einer absolut glatten Fläche frei stehende Person sich zwar keine Drehungsgeschwindigkeit zu erteilen, wohl aber eine Drehung, etwa dadurch, daß sie den rechten Arm seitwärts nach außen streckt, ihn dann im horizontalen Halbkreis vorn herum nach links führt und schließlich wieder einzieht. Diese Bewegung, gehörig oft wiederholt, bewirkt eine Drehung der Person um einen beliebig großen Winkel nach rechts. Hierher gehört auch das berühmte scheinbare Paradoxon von der herabgeworfenen Katze, die es stets fertig bringt, auf ihre Füße zu fallen.

§ 138. Im allgemeinen Fall läßt sich die Gleichung (463) nicht integrieren, wohl aber erfährt sie häufig eine Vereinfachung, wenn man an Stelle des ruhenden Koordinatensystems ein bewegtes einführt mit parallel bleibenden Achsen und dem Schwerpunkt als Anfangspunkt, nach den Gleichungen (191), welche in Vektorform lauten:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' + \mathfrak{r}_0, \quad \dot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{r}}' + \dot{\mathfrak{r}}_0, \quad \ddot{\mathfrak{r}} = \ddot{\mathfrak{r}}' + \ddot{\mathfrak{r}}_0, \tag{465}$$

wobei wegen (287):

$$\Sigma m\mathfrak{r}' = 0, \quad \Sigma m\dot{\mathfrak{r}}' = 0, \quad \Sigma m\ddot{\mathfrak{r}}' = 0. \tag{466}$$

Da ferner nach (192) $\mathfrak{F}_a = \mathfrak{F}_a'$, so geht (463) durch Einführung des gestrichenen Koordinatensystems über in:

$$\Sigma[\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}_0, m(\ddot{\mathfrak{r}}' + \ddot{\mathfrak{r}}_0)] = \Sigma[\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}_0, \mathfrak{F}_a']$$

oder:

$$\Sigma[\mathfrak{r}', m\ddot{\mathfrak{r}}'] + \Sigma[\mathfrak{r}_0, m\ddot{\mathfrak{r}}'] + \Sigma[\mathfrak{r}', m\ddot{\mathfrak{r}}_0] + \Sigma[\mathfrak{r}_0, m\ddot{\mathfrak{r}}_0]$$
$$= \Sigma[\mathfrak{r}', \mathfrak{F}_a'] + \Sigma[\mathfrak{r}_0, \mathfrak{F}_a'].$$

In dieser Gleichung verschwindet auf der linken Seite das zweite und das dritte Glied wegen (466), wie man sich durch Berechnung irgendeiner Komponente überzeugt; das vierte Glied aber ist nach (448) gleich dem zweiten Glied auf der rechten Gleichungsseite, so daß man schließlich nur übrig behält:

$$\Sigma[\mathfrak{r}', m\ddot{\mathfrak{r}}'] = \Sigma[\mathfrak{r}', \mathfrak{F}_a'], \tag{467}$$

und das ist wieder genau die Gleichung (463), nur mit gestrichenen Größen. Ihre besondere Bedeutung beruht darauf, daß das resultierende Moment der äußeren Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt häufig einen einfacheren Wert besitzt, als das in bezug auf den im Raume festen Koordinatenanfangspunkt. Ist dasselbe gleich Null, wie z. B. für die Schwerkraft, so gilt für die relative Be-

wegung des Punktsystems um den Schwerpunkt das Prinzip der Flächen (464), mag sich der Schwerpunkt auch in noch so verwickelter Weise bewegen. Wenn man z. B. einen schweren starren Körper irgendwie fortschleudert, so dreht er sich, abgesehen vom Luftwiderstand, genau ebenso um den Schwerpunkt, als wenn der Schwerpunkt ruhte und gar keine äußere Kraft wirksam wäre; aus diesem Satz, in Verbindung mit dem Satze § 131 über die Bewegung des Schwerpunkts, läßt sich die Frage nach der Bewegung des Körpers vollständig beantworten. Eine ähnliche Folgerung läßt sich ziehen bezüglich der Drehung eines Planeten um seinen Schwerpunkt.

Viertes Kapitel. Dynamik eines starren Körpers.

§ 139. Wir wollen nun zum Schluß noch die allgemeinen Sätze der Dynamik anwenden auf die Bewegung eines starren Körpers, und überzeugen uns zunächst davon, daß in jedem Falle die 6 Gleichungen (445) und (446) zur vollständigen Lösung der Aufgabe gerade hinreichen. Denn wenn der Körper vollkommen frei ist, so besitzt er nach § 103 auch 6 Grade von Bewegungsfreiheit, entsprechend den 6 Bewegungsgleichungen, in denen dann alle äußeren Kräfte $\mathfrak{F}_a$ als gegeben anzusehen sind. Ist aber die Bewegung des Körpers von vornherein durch vorgeschriebene Bedingungen beschränkt, so besteht ein Teil der äußeren Kräfte aus Zwangskräften, und die Gleichungen, welche diese Zwangskräfte enthalten, können nicht zur Bestimmung der Bewegung dienen. Wir wissen aber schon aus § 91, daß für den Fall des Gleichgewichts die treibenden Kräfte allein stets gerade so viele Gleichungen befriedigen müssen, als Freiheitsgrade vorhanden sind, und eben diese Gleichungen, verallgemeinert durch die Hinzufügung des Trägheitswiderstandes, enthalten auch die Gesetze der Bewegung. Ist auf diese Weise die Bewegung des Körpers bestimmt worden, so kann man aus den übrigen Gleichungen die Zwangskräfte ableiten, welche dazu nötig sind, um bei dieser Bewegung die vorgeschriebenen Bedingungen aufrecht zu erhalten.

§ 140. Nehmen wir zuerst einen Körper, der um eine feste Achse drehbar ist; derselbe besitzt einen Grad von Bewegungsfreiheit. Wir machen die Drehungsachse zur z-Achse. Die treibenden Kräfte denken wir uns als gegeben und nach § 88 zu einer im Koordinatenanfangspunkt angreifenden resultierenden Kraft $\mathfrak{F}$ und einem Kräftepaar $\mathfrak{N}$ vereinigt; desgleichen die von

vornherein unbekannten Zwangskräfte zu der Resultierenden $\mathfrak{F}'$ und dem Kräftepaar $\mathfrak{N}'$.

Dann enthält von den sechs Gleichungen (445) und (446) nur die letzte kein auf die Zwangskräfte bezügliches Glied. Denn nach § 91 vermögen die Kräfte, welche die z-Achse festhalten, kein Drehungsmoment um diese Achse zu liefern. Es gilt daher für die z-Komponente von (446):

$$\Sigma m_1 \left(x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) = \mathfrak{N}_z , \qquad (468)$$

wo die Summierung über alle einzelnen Massenpunkte oder Massenelemente des Körpers zu erstrecken ist; und diese eine Gleichung genügt zur Bestimmung der Bewegung. Wir haben nur noch alle darin vorkommenden Variabeln durch die einzige unabhängige Variable auszudrücken, welche die Lage des Körpers bestimmt, und als welche wir den Winkel φ nehmen, den eine beliebig ausgewählte, durch die z-Achse gelegte im Körper feste Ebene mit der xz-Ebene bildet. Dann ist mit Einführung von Zylinderkoordinaten, ebenso wie in (326a):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\varrho_1 \sin \varphi_1 \frac{d\varphi}{dt} , \\ \frac{dy_1}{dt} &= \varrho_1 \cos \varphi_1 \frac{d\varphi}{dt} , \\ \frac{dz_1}{dt} &= 0 , \end{aligned}\right\} \qquad (469)$$

wenn ϱ_1 die konstante Entfernung des Punktes 1 von der z-Achse bezeichnet, und durch nochmalige Differentiation:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\varrho_1 \cos \varphi_1 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \varrho_1 \sin \varphi_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} , \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -\varrho_1 \sin \varphi_1 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \varrho_1 \cos \varphi_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} , \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= 0 , \end{aligned}\right\} \qquad (469\,\text{a})$$

folglich durch Substitution in (468):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \Sigma m_1 \varrho_1^2 = \mathfrak{N}_z .$$

Diese Bewegungsgleichung besitzt ganz die Form derjenigen (8) eines Massenpunktes auf einer Geraden, nur daß statt der Beschleunigung die Winkelbeschleunigung, statt der Kraft das Drehungsmoment und statt der konstanten trägen Masse die konstante Summe $\Sigma m_1 \varrho_1^2$ auftritt, welche daher das Trägheitsmoment J des Körpers in bezug auf die z-Achse genannt wird.

Die Integration der Gleichung vollzieht sich daher auch ganz nach den nämlichen Methoden wie bei der geradlinigen Bewegung.

Noch direkter gestaltet sich die Ableitung, wenn man die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art benutzt. Denn die Arbeit der äußeren Kräfte bei einer Verschiebung des Körpers um $d\varphi$ ist nach (327):

$$A = \mathfrak{N}_z \cdot d\varphi,$$

also die äußere Kraftkomponente nach (403):

$$\Phi = \mathfrak{N}_z^{\cdot}.$$

Andererseits ist das kinetische Potential, mit Benutzung von (469):

(470) $$H = L = \frac{1}{2} \Sigma m_1 q_1^2 = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2.$$

Folglich nach (405):

(471) $$J\ddot{\varphi} = \mathfrak{N}_z,$$

wie oben.

§ 141. Nachdem die Bewegung mittelst (471) bestimmt ist, ergeben sich für die resultierende Kraft und die resultierenden Drehungsmomente der Zwangskräfte, von denen die Drehungsachse festgehalten wird, oder, was dasselbe bedeutet, für den Widerstand, den die Drehungsachse leisten muß, aus (445) und (446) die fünf Gleichungen:

(472) $$\mathfrak{F}' = \Sigma m_1 \ddot{\mathfrak{r}}_1 - \mathfrak{F},$$

(473) $$\begin{cases} \mathfrak{N}_x' = \Sigma m_1 \left(y_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} \right) - \mathfrak{N}_x, \\ \mathfrak{N}_y' = \Sigma m_1 \left(z_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} - x_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} \right) - \mathfrak{N}_y. \end{cases}$$

Wir wollen hier den speziellen Fall weiter verfolgen, daß die treibenden Kräfte alle Null sind, daß also der Körper sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um die feste z-Achse dreht. Dann sind $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ gleich Null, während die Zwangskräfte $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{N}'$ durch die letzten Gleichungen bestimmt werden, wenn man darin die Glieder mit $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ fortläßt.

Die resultierende Zwangskraft $\mathfrak{F}'$ hat eine anschauliche Bedeutung. Denn wenn man in (472) für die Komponente von $\ddot{\mathfrak{r}}_1$ die Werte (469a) einsetzt, ergibt sich, mit Rücksicht auf $\ddot{\varphi} = 0$ und auf (287):

$$\mathfrak{F}_x' = -\dot{\varphi}^2 \Sigma m_1 \varrho_1 \cos \varphi_1 = -\dot{\varphi}^2 \Sigma m_1 x_1 = -\dot{\varphi}^2 x_0 \Sigma m_1.$$
$$\mathfrak{F}_y' = -\dot{\varphi}^2 y_0 \Sigma m_1,$$
$$\mathfrak{F}_z' = 0,$$

d. h. die resultierende Zwangskraft ist gleich und entgegengesetzt der Zentrifugalkraft des mit der Masse Σm_1 und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um die Drehungsachse rotierenden Schwerpunktes, — ein Satz, der auch direkt aus dem Prinzip der Bewegung des Schwerpunktes (§ 131) folgt.

Nehmen wir nun weiter an, daß die Drehungsachse durch den Schwerpunkt geht, so verschwindet die resultierende Zwangskraft $\mathfrak{F}'$, aber die Drehungsmomente der Zwangskräfte $\mathfrak{N}_x'$ und $\mathfrak{N}_y'$ sind im allgemeinen von Null verschieden, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{N}_x' &= \dot{\varphi}^2 \Sigma m_1 y_1 z_1 , \\ \mathfrak{N}_y' &= -\dot{\varphi}^2 \Sigma m_1 x_1 z_1 . \end{aligned}\right\} \quad (474)$$

Dies bedeutet, daß auch in dem jetzigen Falle die Drehungsachse durch äußere Kräfte, und zwar durch ein Kräftepaar, gestützt werden muß, wenn sie in Ruhe bleiben soll, oder daß, wenn die Achse einmal frei gegeben wird, der Körper, trotzdem keine treibenden Kräfte wirken und trotzdem der Schwerpunkt in Ruhe bleibt, die Richtung seiner Drehung nicht mehr beibehalten wird. Die Frage, wie sich dann die Drehungsachse ändert, gehört zu der späteren Untersuchung über die Bewegung um einen festen Punkt.

Nur in dem speziellen Falle, daß:

$$\Sigma m_1 y_1 z_1 = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma m_1 x_1 z_1 = 0 , \qquad (475)$$

fällt der äußere Zwang bei der betrachteten Drehung ganz fort, und die z-Achse besitzt die Eigenschaft einer „freien“ oder „permanenten“ Drehungsachse.

§ 142. Nachdem wir im § 140 auf den Begriff des Trägheitsmoments $\Sigma m \varrho^2 = J$ eines Körpers in bezug auf eine bestimmte Achse geführt worden sind, wollen wir nun die Frage näher untersuchen, nach welchen Gesetzen die Größe des Trägheitsmoments eines bestimmten Körpers von der Lage der Achse abhängt; denn die letztere ist von vornherein vollkommen willkürlich wählbar, sie kann auch ganz außerhalb der Masse des Körpers liegen.

Betrachten wir zuerst die Trägheitsmomente eines bestimmten Körpers in bezug auf solche Gerade, die alle durch einen einzigen Punkt, den Koordinatenanfangspunkt O, gehen. Die Lage einer derartigen Geraden ist bestimmt durch ihre Richtungscos λ, μ, ν. Nun ist, wenn x, y, z die Koordinaten des Massenpunktes m, und r seine Entfernung von O bedeutet:

$$\varrho = r \cdot \sin \vartheta ,$$

wo ϑ den Winkel zwischen dem Radiusvektor r und der Geraden (λ, μ, ν) bezeichnet, also:

$$\cos\vartheta = \lambda \cdot \frac{x}{r} + \mu \cdot \frac{y}{r} + \nu \cdot \frac{z}{r}.$$

Folglich besitzt das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Gerade (λ, μ, ν) den Wert:

$$J = \Sigma m r^2 \sin^2\vartheta = \Sigma m r^2 (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \cos^2\vartheta),$$

$$J = \lambda^2 \cdot \Sigma m (y^2 + z^2) + \mu^2 \Sigma m (z^2 + x^2) + \nu^2 \Sigma m (x^2 + y^2)$$

$$(476) \qquad - 2\mu\nu\, \Sigma m y z - 2\nu\lambda\, \Sigma m z x - 2\lambda\mu\, \Sigma m x y.$$

Läßt man nun die Richtung der Geraden, also λ, μ, ν, variieren, so bleiben die sechs Summen Σ konstant und erweisen sich dadurch als charakteristisch für die Größen der Trägheitsmomente in bezug auf sämtliche durch O gehende Gerade. Die drei ersten Summen sind die Trägheitsmomente J_x, J_y, J_z in bezug auf die drei Koordinatenachsen. Die drei letzten bezeichnet man auch als „Deviationsmomente".

Eine gute Übersicht über die Art der Abhängigkeit der Größe J von λ, μ, ν läßt sich gewinnen, wenn man auf jeder durch O gehenden Richtung λ, μ, ν den Wert von $\frac{1}{\sqrt{J}}$ als Strecke von O ab aufgetragen denkt. Dann bilden die Endpunkte ξ, η, ζ aller dieser Strecken eine Fläche, deren Gleichung bestimmt wird durch die Beziehungen:

$$\xi = \frac{\lambda}{\sqrt{J}}, \quad \eta = \frac{\mu}{\sqrt{J}}, \quad \zeta = \frac{\nu}{\sqrt{J}}$$

in Verbindung mit (476).

Dies ergibt mit Elimination von λ, μ, ν als Gleichungen der Fläche:

$$(477) \quad \xi^2 J_x + \eta^2 J_y + \zeta^2 J_z - 2\eta\zeta\, \Sigma m y z - 2\zeta\xi\, \Sigma m z x - 2\xi\eta\, \Sigma m x y = 1,$$

also ein Ellipsoid mit dem Anfangspunkt O als Zentrum, welches das „Trägheitsellipsoid" des Körpers in bezug auf den Punkt O genannt wird.

Ein jeder Punkt im ganzen unendlichen Raume kann als Zentrum eines solchen Trägheitsellipsoids angesehen werden, und das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf irgendeine durch diesen Punkt gehende Gerade ist gleich dem reziproken Quadrat des betreffenden Halbdurchmessers des Ellipsoids.

Da die Größe des Trägheitsmoments unabhängig ist von der Wahl der Koordinatenachsen, so ist auch die Form des Trägheitsellipsoids davon unabhängig.

Die Hauptachsen des Ellipsoids heißen „Hauptträgheitsachsen" und die entsprechenden Trägheitsmomente die „Hauptträgheitsmomente". Letztere sind zugleich die reziproken Quadrate der Halbachsen des Ellipsoids.

Die Gleichung des Trägheitsellipsoids nimmt eine besonders einfache Form an, wenn man die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen läßt; denn dann lautet sie:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1,$$

oder, wenn wir die Hauptträgheitsmomente mit P, Q, R bezeichnen:

$$P\xi^2 + Q\eta^2 + R\zeta^2 = 1. \tag{478}$$

Der Vergleich mit der allgemeinen Gleichung (477) zeigt, daß für die Hauptträgheitsachsen als Koordinatenachsen die Deviationsmomente verschwinden:

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma mxy = 0, \tag{479}$$

und daraus wiederum folgt nach (476) für das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf eine Gerade, deren Richtungscos mit den Hauptträgheitsachsen λ, μ, ν sind:

$$J = P\lambda^2 + Q\mu^2 + R\nu^2. \tag{480}$$

Das größte unter den drei Hauptträgheitsmomenten P, Q, R, nämlich dasjenige, welches der kleinsten Achse des Trägheitsellipsoids angehört, stellt zugleich das größte Trägheitsmoment dar, welches eine Gerade durch O überhaupt besitzen kann, und umgekehrt. Wenn speziell $P = Q = R$, so ist auch $J = P$, und das Trägheitsellipsoid wird eine Kugel. Dies gilt z. B. für den Mittelpunkt eines homogenen Körpers von der Form einer Kugel oder auch eines Würfels, aus Symmetriegründen.

Die Lage, die Größe und die Achsenrichtung des Trägheitsellipsoids ändern sich, wenn man den Mittelpunkt des Ellipsoids verschiebt. Im allgemeinen läßt sich sagen, daß die Dimensionen des Trägheitsellipsoids um so mehr zusammenschrumpfen, je weiter sich der Mittelpunkt des Ellipsoids vom Körper entfernt.

Vergleicht man die Gleichungen (479) mit (475), so ergibt sich, daß diejenigen Hauptträgheitsachsen, welche durch den Schwerpunkt des Körpers gehen, zugleich die Eigenschaft freier oder permanenter Drehungsachsen besitzen, und zwar als einzige ihrer Art.

§ 143. Wir fragen nun weiter nach den Trägheitsmomenten eines Körpers in bezug auf zwei Gerade, die nicht von dem näm-

lichen Punkt ausgehen, und zwar zunächst für zwei Parallele. Nehmen wir die erste derselben zur z-Achse, so können wir die zweite als die z'-Achse eines zweiten, gestrichenen Koordinatensystems mit parallelen Achsenrichtungen betrachten, und erhalten dann für die beiden zu vergleichenden Trägheitsmomente:

$$J_z = \Sigma m (x^2 + y^2), \quad J_{z'} = \Sigma m (x'^2 + y'^2).$$

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, können wir weiter die durch z und z' gelegte Ebene als (xz)-Ebene und den Anfangspunkt O' auf der x-Achse befindlich annehmen. Dann lauten die Transformationsgleichungen einfach:

$$x' = x - h, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

wo h die Entfernung der beiden Parallelen bedeutet, und das Trägheitsmoment in bezug auf die z'-Achse wird:

$$J_{z'} = \Sigma m (x^2 + y^2) - 2h \Sigma m x + h^2 \Sigma m.$$

Lassen wir nun die z-Achse durch den Schwerpunkt des Körpers gehen, so wird $\Sigma m x = 0$, und die letzte Gleichung lautet:

$$J_{z'} = J_z + h^2 \Sigma m, \tag{481}$$

d. h. das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf irgendeine Gerade ist gleich dem Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Parallele, vermehrt um das Produkt der Gesamtmasse in das Quadrat des Abstandes der Geraden vom Schwerpunkt. Unter allen zu einer bestimmten Richtung parallelen Geraden liefert also diejenige durch den Schwerpunkt das kleinste Trägheitsmoment, und die übrigen Parallelen gruppieren sich nach ihrem Trägheitsmoment in koaxialen Kreiszylindern um diese eine Gerade.

Damit ist nun auch die allgemeine Frage nach dem Trägheitsmoment J eines Körpers in bezug auf eine ganz beliebige Gerade erledigt. Bezeichnet nämlich nun M die Masse, P, Q, R die Hauptträgheitsmomente des Körpers in bezug auf seinen Schwerpunkt, so ist nach (480) und (481):

$$J = P\lambda^2 + Q\mu^2 + R\nu^2 + Mh^2, \tag{482}$$

wenn λ, μ, ν die Richtungscos der Geraden in bezug auf die Hauptträgheitsachsen, und h ihre Entfernung vom Schwerpunkt bedeutet.

§ 144. Machen wir noch eine Anwendung auf die Bewegung eines schweren Körpers mit fester horizontaler Drehungsachse: eines sogenannten „physischen“ Pendels, im Gegensatz zu dem im

§ 69 behandelten „mathematischen" Pendel. Im Anschluß an die dortige Bezeichnung bestimmen wir die Lage des Körpers durch den Winkel φ, welchen die durch die Drehungsachse und den Schwerpunkt S des Körpers gehende Ebene mit der durch die Drehungsachse gehenden Vertikalebene bildet, und legen die Zeichnungsebene (Fig. 38) durch S und rechtwinklig zur Drehungsachse, die sie im Punkte O schneidet. Dann ist die treibende Kraft Mg mit dem Angriffspunkt S, und ihr Drehungsmoment in bezug auf die feste Achse:

$$-Mgh\sin\varphi,$$

wo $h = SO$ die Entfernung des Schwerpunktes von der Achse ist. Mithin nach (471):

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mgh\sin\varphi. \tag{483}$$

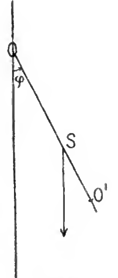


Fig. 38.

Ein Vergleich dieser Gleichung mit der (244) für ein mathematisches Pendel von der Länge l ergibt völlige Identität derselben, wenn gesetzt wird:

$$l = \frac{J}{Mh}, \tag{484}$$

d. h. die Bewegung eines physischen Pendels erfolgt genau ebenso wie die eines mathematischen Pendels mit der durch (484) bestimmten Länge l. Daher heißt diese Größe auch die „reduzierte Pendellänge", und der auf der Geraden OS um die Strecke l von O entfernte Punkt heißt das „Schwingungszentrum" O'.

Über die Abhängigkeit der Strecken l und h voneinander gibt die folgende Betrachtung Auskunft.

Nach (481) ist:

$$J = J_0 + Mh^2,$$

wenn J_0 das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Parallele zur Drehungsachse bedeutet. Also mit Substitution in (484):

$$l = h + \frac{J_0}{Mh}, \tag{485}$$

daher ist $l > h$, wie in der Fig. 38 gezeichnet. Verlegt man die Drehungsachse in eine andere parallele Gerade, so ändern sich h und l nach (485), während J_0 und M konstant bleiben.

Sowohl wenn h sehr klein als auch wenn h sehr groß wird (Schwerpunkt sehr nahe an oder sehr weit von der Drehungsachse), nimmt die reduzierte Pendellänge l und mit ihr die Schwingungs-

dauer sehr große Werte an, im letzteren Falle fallen Schwerpunkt und Schwingungszentrum nahe zusammen, wie beim mathematischen Pendel. Ein Minimum wird l für $h=\sqrt{\frac{J_0}{M}}$, nämlich:

$l=2\sqrt{\frac{J_0}{M}}=2h.$

Geht man von einem beliebigen Wert von h aus, dem ein gewisser Wert von l entspricht, und verlegt dann die Drehungsachse in die Parallele durch das Schwingungszentrum O', macht also:

$$h'=l-h=\frac{J_0}{Mh},$$

so erhält man als neues Schwingungszentrum denjenigen Punkt, der von O' entfernt ist um die Strecke:

$$l'=h'+\frac{J_0}{Mh'}=l-h+h=l, \tag{486}$$

d. h. das neue Schwingungszentrum fällt mit O zusammen, und die reduzierte Pendellänge ist dieselbe wie vorher. Auf diesem Satze beruht die Bedeutung des Reversionspendels.

§ 145. Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt und gelangen damit zu einer wesentlich neuen Gattung von Erscheinungen. Während nämlich die Drehung eines Körpers um eine feste Gerade, wie wir gesehen haben, eine gewisse Analogie zeigt mit der Bewegung eines Punktes auf einem Kreisbogen (physisches und mathematisches Pendel), ist die Drehung um einen festen Punkt wesentlich verwickelter als die Bewegung eines Punktes auf einer Kugelfläche, weil hier drei Freiheitsgrade, dort aber nur zwei vorhanden sind.

Bilden wir uns daher zunächst rein kinematisch eine Anschauung von der Natur einer solchen Drehung.

Aus § 101 wissen wir, daß die Drehung um einen festen Punkt O in jedem Augenblick eine Drehung ist um eine durch O gehende Gerade. Aber diese Gerade wird nicht für alle Zeiten die nämliche sein, sondern sie wird ihre Richtung stetig wechseln, und zwar sowohl im Raume als auch im Körper, d. h. es werden sich sowohl die Winkel ändern, welche die augenblickliche Drehungsachse mit den Koordinatenachsen bildet, als auch werden die materiellen Punkte wechseln, welche die Drehungsachse darstellen.

Um dies anschaulich zu machen, kann man sich zunächst denken, daß die Drehung stets eine endliche, aber äußerst kleine

Zeit lang um die jeweilige Drehungsachse stattfindet und dann plötzlich auf eine sehr nahe benachbarte Drehungsachse überspringt.

Dann bilden die Richtungen, welche nach und nach die Rolle der Drehungsachse übernehmen, eine Schar von Geraden im Raume: OP_1, OP_2, OP_3, $\cdots$ (Fig. 39). Anderseits bilden diejenigen materiellen Geraden, um welche nach und nach die Drehung stattfindet, eine Schar von Geraden im Körper: OP'_1, OP'_2, OP'_3, $\cdots$, die man sich dadurch fixiert denken mag, daß man ihre Durchschnittspunkte P'_1, P'_2, P'_3, $\cdots$ mit der Körperoberfläche mit einem Zeichen versieht. Wenn diese beiden Scharen von Geraden, die im Raume feste, und die im Körper feste, bekannt sind, so ergibt sich unmittelbar die Art der Bewegung: es ist eine Drehung des Körpers, und somit auch der im Körper festliegenden Schar von Geraden OP', um diejenige Gerade, welche jeweils den beiden Scharen gemeinsam ist, also in dem durch die Figur dargestellten Augenblick um die Gerade OP_1. Das Überspringen auf die nächste Drehungsachse tritt immer gerade dann ein, wenn die nächste Gerade der Schar OP' mit der nächsten Geraden der Schar OP zusammenfällt, in der Figur, wenn OP'_2 mit OP_2 zusammenfällt. Auf diese Weise treten die Drehungsachsen OP_1, OP_2, OP_3, $\cdots$ der Reihe nach in Tätigkeit, sobald die materiellen Geraden OP'_1, OP'_2, OP'_3, $\cdots$ deren Richtungen annehmen.

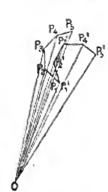


Fig. 39.

Geht man schließlich von den endlichen kleinen Zeiten und Winkeln zu den unendlich kleinen Werten über, so verwandeln sich die beiden Scharen von Geraden in zwei sich längs einer Geraden berührende Kegel OP und OP', von denen der erste im Raume, der zweite im Körper fest ist, und die Bewegung des Körpers um den festen Punkt O erweist sich als identisch mit dem Abrollen des im Körper festen Kegels an dem im Raume festen Kegel, insofern man als „Rollen" eine Bewegung bezeichnet, bei welcher die Berührungsgerade der beiden Kegel ruht.

Wenn der eine Kegel in eine einzige Gerade zusammenschrumpft, tut es der andere auch. Dann erfolgt die Drehung um eine sowohl im Raume als auch im Körper feste Achse.

§ 146. Die dynamischen Gesetze der Bewegung sind vollständig enthalten in den drei Gleichungen (463):

$$\Sigma[\mathfrak{r}, m\ddot{\mathfrak{r}}] = \mathfrak{N}, \tag{487}$$

wo $\mathfrak{N}$ das Drehungsmoment der treibenden Kräfte in bezug auf den festen Punkt O bedeutet.

Denn die Zwangskräfte, welche diesen Punkt festhalten, vermögen kein Drehungsmoment um ihn zu liefern. Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht allein darin, die Summe Σ zurückzuführen auf die drei unabhängigen Variabeln, von denen die Lage des Körpers abhängt, und ihre ersten und zweiten Differentialquotienten nach der Zeit. Wir wollen hier diese Aufgabe direkt in Angriff nehmen.

Was zunächst die Lage des Körpers betrifft, so führen wir, um den Vorteil der Symmetrie nicht einzubüßen, ebenso wie in § 100, ein im Körper festliegendes, gestrichenes Koordinatensystem ein, durch die Gleichungen (329). Dann bestehen zwischen den neun Richtungscos α_1 bis γ_3 sechs Relationen, die, je nach Bedarf, in den Formen (331), (332), (333), (334) ausgedrückt werden können, aber außer diesen auch noch andere nützliche Formulierungen zulassen. Die wichtigsten derselben ergeben sich, wenn man die Gleichungen (329) nach x', y', z' auflöst und dann mit denjenigen Gleichungen identifiziert, welche sich aus (329) ergeben, wenn man darin einfach die ungestrichenen Größen mit den gestrichenen, und zugleich die Buchstaben α, β, γ mit den Ziffern 1, 2, 3 wechselseitig vertauscht.

Dann folgt nämlich:

$$(488)\quad \alpha_1 = \frac{\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2}{D}, \quad \beta_1 = \frac{\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2}{D}, \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2}{D}, \text{ usw.}$$

wobei D die Determinante der Gleichungen bedeutet:

$$(489)\qquad D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante besitzt einen sehr einfachen Wert. Denn wenn man die drei Gleichungen (488) quadriert und addiert, so ergibt sich nach (331):

$$\begin{aligned} D^2 &= (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)^2 + (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)^2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 \\ &= (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)(\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2) - (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3)^2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

also:

$$(490)\qquad D = \pm 1.$$

Die Frage des Vorzeichens entscheidet sich dadurch, daß man einen speziellen Fall ins Auge faßt. Denn da die Richtungscos

sich stetig ändern, so ist auch D stetig und, wenn man (490) hinzunimmt, vollkommen konstant. Läßt man nun die x'-Achse mit der x-Achse und die y'-Achse mit der y-Achse zusammenfallen ($\alpha_1 = 1$, $\beta_2 = 1$), so fällt auch die z'-Achse mit der z-Achse zusammen ($\gamma_3 = +1$), da schon im § 100 auch das gestrichene Koordinatensystem als rechtshändig vorausgesetzt wurde. Mithin ist dann die Determinante (489):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{491}$$

und behält diesen Wert für alle Lagen des im Körper festen Systems.

Damit werden die Gleichungen (488):

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 \tag{492}$$

und analog für jeden anderen der neun Richtungscos.

Das Bildungsgesetz dieser neun Relationen leuchtet unmittelbar ein, wenn man bedenkt, daß auf der rechten Gleichungsseite nur diejenigen Buchstaben und Ziffern auftreten, welche links nicht vorkommen.

So ist z. B.:

$$\gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \text{ usw.}$$

§ 147. Wenden wir uns jetzt zu dem Geschwindigkeitszustand des Körpers. Auch hier knüpfen wir an das im zweiten Kapitel abgeleitete Resultat an, daß die allgemeinste unendlich kleine Verschiebung des Körpers dargestellt wird durch die Komponenten einer Drehung in bezug auf die drei Koordinatenachsen. Auch die Bezeichnungen nehmen wir vom § 100 herüber, nur wollen wir hier unter ξ, η, ζ nicht die unendlich kleinen Drehungswinkel selber, sondern die endlichen Verhältnisse dieser Winkel zu dem Zeitelement dt verstehen, die wir passend als die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit in bezug auf die Koordinatenachsen x, y, z bezeichnen. Dann erhalten wir statt der Gleichungen (336):

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \beta_1\frac{d\gamma_1}{dt} + \beta_2\frac{d\gamma_2}{dt} + \beta_3\frac{d\gamma_3}{dt} = -\left(\gamma_1\frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2\frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_3\frac{d\beta_3}{dt}\right), \\ \eta &= \gamma_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \gamma_2\frac{d\alpha_2}{dt} + \gamma_3\frac{d\alpha_3}{dt} = -\left(\alpha_1\frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_2\frac{d\gamma_2}{dt} + \alpha_3\frac{d\gamma_3}{dt}\right), \\ \zeta &= \alpha_1\frac{d\beta_1}{dt} + \alpha_2\frac{d\beta_2}{dt} + \alpha_3\frac{d\beta_3}{dt} = -\left(\beta_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2\frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_3\frac{d\alpha_3}{dt}\right), \end{aligned}\right\} \tag{493}$$

während statt der Gleichungen (335) die analogen auftreten:

(494) $$\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \alpha_3 \frac{d\alpha_3}{dt} = 0, \text{ usw.}$$

Die Verhältnisse der Komponenten ξ, η, ζ bestimmen wiederum die Richtung der Drehungsachse, und der absolute Betrag des Vektors die Größe der Drehungsgeschwindigkeit, d. h. das Verhältnis des unendlich kleinen Drehungswinkels zum Zeitelement dt:

(495) $$\omega = +\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Wie bei jedem Vektor, so ergibt sich auch bei der Drehungsgeschwindigkeit die Komponente in irgendeiner beliebigen Richtung durch Multiplikation der drei Größen ξ, η, ζ einzeln mit den entsprechenden Richtungscos der betreffenden Richtung, und Addition der erhaltenen Produkte. Nach diesem Bildungsgesetz ergeben sich auch die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit in denjenigen Richtungen, welche die gestrichenen Koordinatenachsen in dem betrachteten Augenblick einnehmen:

(496) $$\begin{cases} \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta = \xi', \\ \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta = \eta', \\ \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta = \zeta', \end{cases}$$

oder, wie unmittelbar daraus folgt:

(497) $$\begin{cases} \xi = \alpha_1 \xi' + \alpha_2 \eta' + \alpha_3 \zeta', \\ \eta = \beta_1 \xi' + \beta_2 \eta' + \beta_3 \zeta', \\ \zeta = \gamma_1 \xi' + \gamma_2 \eta' + \gamma_3 \zeta'. \end{cases}$$

Die Bezeichnungen sind wiederum so gewählt, daß die ungestrichenen Größen ξ, η, ζ den Buchstaben α, β, γ, die gestrichenen Größen ξ', η', ζ' den Ziffern 1, 2, 3 entsprechen.

Man nennt gewöhnlich ξ', η', ζ' die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit des Körpers in bezug auf die gestrichenen Koordinatenachsen. Diese Bezeichnung ist aber mit Vorsicht zu gebrauchen, da doch der Körper im gestrichenen Koordinatensystem festliegt und daher in bezug darauf durchweg die Drehungsgeschwindigkeit Null besitzt.

Die Einführung der Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit gewährt den wichtigen Vorteil, daß sich die zeitlichen Differentialquotienten aller neun Richtungscos $\alpha_1, \cdots \gamma_3$ bequem und symmetrisch durch diese drei Größen ausdrücken lassen. So ist z. B. nach (496) und (492):

(497a) $$\begin{aligned} \alpha_1 \eta' - \alpha_2 \xi' &= \alpha_1(\alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta) - \alpha_2(\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta) \\ &= \gamma_3 \eta - \beta_3 \zeta \end{aligned}$$

und weiter nach (493):

$$=\gamma_3\left(\gamma_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\gamma_2\frac{d\alpha_2}{dt}+\gamma_3\frac{d\alpha_3}{dt}\right)+\beta_3\left(\beta_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\beta_2\frac{d\alpha_2}{dt}+\beta_3\frac{d\alpha_3}{dt}\right)$$

$$=-\alpha_1\alpha_3\frac{d\alpha_1}{dt}-\alpha_3\alpha_2\frac{d\alpha_2}{dt}+(1-\alpha_3^2)\frac{d\alpha_3}{dt}=\frac{d\alpha_3}{dt},$$

mithin:

$$\frac{d\alpha_3}{dt}=\alpha_1\eta'-\alpha_2\xi' \tag{498}$$

und dementsprechend acht andere Relationen, für deren Bildungsgesetz charakteristisch ist, daß auf der rechten Seite der Gleichung nur derjenige Buchstabe auftritt, der auch links steht (hier α), während umgekehrt gerade diejenigen Ziffern auftreten (hier 1 und 2), welche links fehlen.

Diesen neun Relationen stehen nach (497a) gegenüber die anderen neun von der Form:

$$\frac{d\alpha_3}{dt}=\gamma_3\eta-\beta_3\zeta,\ \text{usw.}, \tag{499}$$

in welchen die Buchstaben α, β, γ und die Ziffern 1, 2, 3 ihre Rollen vertauscht haben.

Die durchgehende Analogie zwischen den gestrichenen und den ungestrichenen Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit spricht sich auch in den Beziehungen aus, mittelst deren sich ξ', η', ζ' durch die Differentialquotienten der α, β, γ ausdrücken. Man gelangt zu ihnen durch Kombinierung von (496), (492) und (499):

$$\xi'=(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)\xi+(\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2)\eta+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\zeta$$
$$=\alpha_2(\beta_3\zeta-\gamma_3\eta)+\beta_2(\gamma_3\xi-\alpha_3\zeta)+\gamma_2(\alpha_3\eta-\beta_3\xi)$$

$$\xi'=-\left(\alpha_2\frac{d\alpha_3}{dt}+\beta_2\frac{d\beta_3}{dt}+\gamma_2\frac{d\gamma_3}{dt}\right)=\left(\alpha_3\frac{d\alpha_2}{dt}+\beta_3\frac{d\beta_2}{dt}+\gamma_3\frac{d\gamma_2}{dt}\right),\ \text{usw.}, \tag{500}$$

in vollkommener Analogie mit (493).

Ebenso entsprechen den drei Gleichungen (494) die folgenden drei:

$$\alpha_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\beta_1\frac{d\beta_1}{dt}+\gamma_1\frac{d\gamma_1}{dt}=0,\ \text{usw.} \tag{501}$$

§ 148. Wir sind nun soweit vorbereitet, um die Reduktion der drei Bewegungsgleichungen (487) auf die unabhängigen Variabeln direkt vorzunehmen. Wir schreiben die erste derselben in der Form:

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\mathfrak{N}_x \tag{502}$$

und führen statt der ungestrichenen Koordinaten x, y, z des Massen-

punktes m die gestrichenen x', y', z' ein, da diese nicht von der Zeit abhängen. Dies geschieht mittelst der Gleichungen (329) und deren Ableitungen:

$$\frac{dx}{dt} = x'\frac{d\alpha_1}{dt} + y'\frac{d\alpha_2}{dt} + z'\frac{d\alpha_3}{dt}, \cdots \tag{503}$$

und ergibt für die Summe in (502) eine Anzahl Glieder, in denen die Richtungscos und deren Abgeleitete vor die Summierungszeichen Σ gesetzt werden können. Dahinter bleiben allein zurück die sechs Größen $\Sigma m x'^2$, $\Sigma m y'^2$, $\Sigma m z'^2$, $\Sigma m x'y'$, $\Sigma m y'z'$, $\Sigma m z'x'$, welche von der Zeit unabhängig sind.

Wenn wir von jetzt ab die gestrichenen Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen des Körpers in bezug auf den festen Punkt O zusammenfallen lassen, so verschwinden nach (479) die drei letzten Summen und es bleibt von (502) übrig:

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\beta_1\frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_1\frac{d\beta_1}{dt}\right)\sum m x'^2 + \left(\beta_2\frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_2\frac{d\beta_2}{dt}\right)\sum m y'^2 \right.$$
$$\left. + \left(\beta_3\frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_3\frac{d\beta_3}{dt}\right)\sum m z'^2\right\} = \mathfrak{N}_x$$

oder mit Einführung von ξ', η', ζ' aus den Relationen (498) und Berücksichtigung von (492):

$$\frac{d}{dt}\left\{(\alpha_2\eta' + \alpha_3\zeta')\Sigma m x'^2 + (\alpha_3\zeta' + \alpha_1\xi')\Sigma m y'^2 + (\alpha_1\xi' + \alpha_2\eta')\Sigma m z'^2\right\} = \mathfrak{N}_x$$

und schließlich, wenn wir wieder, wie in § 142, die Hauptträgheitsmomente mit P, Q, R bezeichnen und dementsprechend die auf die Hauptträgheitsachsen bezogenen Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit:

$$\xi' = p, \quad \eta' = q, \quad \zeta' = r \tag{504}$$

setzen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\alpha_1 pP + \alpha_2 qQ + \alpha_3 rR\right) &= \mathfrak{N}_x, \\ \text{ebenso: } \frac{d}{dt}\left(\beta_1 pP + \beta_2 qQ + \beta_3 rR\right) &= \mathfrak{N}_y \\ \text{und: } \frac{d}{dt}\left(\gamma_1 pP + \gamma_2 qQ + \gamma_3 rR\right) &= \mathfrak{N}_z. \end{aligned}\right.$$

Diese drei Bewegungsgleichungen sind zwar sehr einfach und übersichtlich gebaut, haben aber noch den Nachteil, daß in ihnen die neun Richtungscos vorkommen. Man kann sich von ihm befreien, wenn man die Gleichungen der Reihe nach mit den entsprechenden Richtungscos multipliziert und addiert, d. h. wenn man die Bewegungsgleichungen statt auf die ungestrichenen auf die ge-

strichenen Koordinatenachsen bezieht. Dann ergibt sich zunächst durch Multiplikation mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und nachfolgender Addition, bei Berücksichtigung von (501), (500) und (504):

$$\left.\begin{aligned} P\frac{dp}{dt}-(Q-R)\,qr&=\mathfrak{N}_{x'},\\ \text{ebenso:}\quad Q\frac{dq}{dt}-(R-P)\,rp&=\mathfrak{N}_{y'}\\ \text{und:}\quad R\frac{dr}{dt}-(P-Q)\,pq&=\mathfrak{N}_{z'}. \end{aligned}\right\} \qquad (506)$$

Dies sind die sogenannten Eulerschen Bewegungsgleichungen. Charakteristisch für sie ist das zweite Glied auf der linken Seite, durch welches sie sich von der Gleichung für die Drehung um eine feste Achse unterscheiden, und welches die Schwankungen der Drehungsachse bedingt.

§ 149. Machen wir nun einige spezielle Anwendungen, zunächst auf den Fall, daß der Körper ursprünglich sich in Ruhe befindet, d. h. daß die Anfangswerte p_0, q_0, r_0 alle verschwinden. Es fragt sich: um welche Gerade wird er unter der Einwirkung der gegebenen Kräfte seine Drehung beginnen?

Da die Richtungsverhältnisse der Drehungsachse in bezug auf die Hauptträgheitsachsen allgemein durch die Verhältnisse $p:q:r$ dargestellt werden, und da für hinreichend kleine Zeiten t:

$$p=p_0+\left(\frac{dp}{dt}\right)_0 t=\left(\frac{dp}{dt}\right)_0\cdot t,$$

so ist beim Beginn der Bewegung:

$$p:q:r=\left(\frac{dp}{dt}\right)_0:\left(\frac{dq}{dr}\right)_0\;\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$$

und nach (506):

$$p:q:r=\frac{\mathfrak{N}_{x'}}{P}:\frac{\mathfrak{N}_{y'}}{Q}:\frac{\mathfrak{N}_{z'}}{R}\,. \qquad (507)$$

Durch diese Gleichung findet auch die am Schluß des § 131 noch unerledigt gebliebene Frage nach der Art der Bewegung, in die ein ursprünglich ruhender freier starrer Körper durch ein Kräftepaar versetzt wird, ihre vollständige Beantwortung. Dort sahen wir, daß der Schwerpunkt des Körpers in Ruhe bleibt, hier erkennen wir die Richtung der anfänglichen Drehungsachse. Dieselbe fällt nur dann mit der Richtung der Achse des Kräftepaares $\mathfrak{N}$ zusammen, wenn entweder die drei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, oder wenn die Achse des Kräfte-

paares eine Hauptträgheitsachse ist. Dann sind die beiden anderen Komponenten von $\mathfrak{N}$ gleich Null.

Im allgemeinen wird der Zusammenhang zwischen der Richtung des Kräftepaares und der Richtung der anfänglichen Drehungsachse bequem veranschaulicht vermittelst des Trägheitsellipsoids. Die Richtung der Drehungsachse ist nämlich in bezug auf dieses Ellipsoid der zur Ebene des Kräftepaares konjugierte Durchmesser, d. h. derjenige Durchmesser des Ellipsoids, in dessen Endpunkt die Tangentialebene parallel ist der Ebene des Kräftepaares. Denn die Tangentialebene des Ellipsoids (478) am Endpunkt des Durchmessers $p:q:r$ hat zur Normalen die Richtung $Pp:Qq:Rr$, und dies ist nach (507) auch die Richtung der Achse des Kräftepaares $\mathfrak{N}$.

§ 150. Wir behandeln weiter den speziellen Fall, daß, bei gegebenem Anfangszustand, das Drehungsmoment $\mathfrak{N}$ der äußeren Kräfte verschwindet, wie z. B. wenn der Körper in seinem Schwerpunkt unterstützt ist, oder wenn überhaupt keine Schwerkraft wirkt. Dann vereinfachen sich die Eulerschen Gleichungen zu:

$$P\frac{dp}{dt} - (Q-R)qr = 0, \cdots. \tag{507a}$$

Fragen wir zunächst nach der Bedingung dafür, daß die Drehung stets um die nämliche Achse stattfindet. Dann liegt diese Achse, wie wir schon im § 145 gesehen haben, sowohl im Raume als auch im Körper fest, und die Drehung erfolgt nach dem Prinzip der lebendigen Kraft mit konstanter Geschwindigkeit, also sind p, q, r konstant, und aus (507a) folgt:

$$(Q-R)qr = 0,$$

nebst den beiden anderen Gleichungen. Diese drei Bedingungen erfordern entweder, daß $P=Q=R$, d. h. das Zentralellipsoid eine Kugel ist, oder, für einen beliebigen Körper, daß zwei der Komponenten p, q, r gleich Null sind, d. h. daß die Drehung um eine Hauptträgheitsachse stattfindet, — ein Resultat, welches genau übereinstimmt mit dem am Schluß des § 142 auf viel einfacherem Wege abgeleiteten.

Im allgemeinen Fall, bei beliebigem Anfangszustand, lassen die drei Gleichungen (507a) zwei einfache Integrationen zu. Durch Multiplikation mit p, q, r und nachfolgende Addition ergibt sich nämlich integriert:

$$Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 = c^2 \tag{508}$$

und durch Multiplikation mit Pp, Qq, Rr auf demselben Wege:

$$P^2p^2 + Q^2q^2 + R^2r^2 = c'^2. \tag{509}$$

Man überzeugt sich leicht, daß durch (508) das Prinzip der lebendigen Kraft, durch (509) das Prinzip der Flächen ausgedrückt wird. Denn nach dem ersteren Prinzip ist die lebendige Kraft der Drehung, als einzige vorhandene Energieart, konstant, d. h. nach (470) und (480):

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2}(P\lambda^2 + Q\mu^2 + R\nu^2)\,\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}(Pp^2 + Qq^2 + Rr^2) = \frac{c^2}{2}, \end{aligned} \tag{510}$$

und nach dem Prinzip der Flächen ergeben die Gleichungen (505) integriert:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 pP + \alpha_2 qQ + \alpha_3 rR &= c_x', \\ \beta_1 pP + \beta_2 qQ + \beta_3 rR &= c_y', \\ \gamma_1 pP + \gamma_2 qQ + \gamma_3 rR &= c_z'. \end{aligned}\right\} \tag{511}$$

Die Konstanten c_x', c_y', c_z' sind nach § 137 die Komponenten des resultierenden Moments der Bewegungsgrößen in bezug auf den Punkt O, ihre Verhältnisse $c_x' : c_y' : c_z'$ ergeben die im Raume feste Richtung der Achse des resultierenden Moments, rechtwinklig zur invariabeln Ebene, und die Summe ihrer Quadrate ist nach (511) und (509):

$$P^2p^2 + Q^2q^2 + R^2r^2 = c_x'^2 + c_y'^2 + c_z'^2 = c'^2. \tag{512}$$

Um die Drehungsgeschwindigkeiten p, q, r als Funktionen der Zeit t zu bestimmen, bedarf es außer (508) und (509) noch einer dritten Integration, und eine solche läßt sich erzielen, ohne daß die Symmetrie aufgegeben wird, wenn man aus den genannten beiden Gleichungen in Verbindung mit $p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$ die Werte von p^2, q^2, r^2 berechnet:

$$p^2 = \frac{QR\omega^2 - c^2(Q+R) + c'^2}{(P-Q)(P-R)}, \;\cdots. \tag{513}$$

Multipliziert man nun die Bewegungsgleichungen (507a) der Reihe nach mit $\frac{p}{P}$, $\frac{q}{Q}$, $\frac{r}{R}$ und addiert, so ergibt sich:

$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} + r\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{dt} = \left(\frac{Q-R}{P} + \frac{R-P}{Q} + \frac{P-Q}{R}\right)pqr \tag{514}$$

und durch Substitution der Werte von p, q, r aus (513):

$$\frac{d\omega^2}{dt} = 2\sqrt{(A-\omega^2)(B-\omega^2)(C-\omega^2)}, \tag{515}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$A = \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{R}\right) c^2 - \frac{1}{QR} c'^2$$

$$B = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{P}\right) c^2 - \frac{1}{RP} c'^2$$

$$C = \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{Q}\right) c^2 - \frac{1}{PQ} c'^2 .$$

Hiernach ist ω^2 eine elliptische Funktion von t, also periodisch, und ebenso nach (513) die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit in bezug auf die Hauptträgheitsachsen.

§ 151. Eine durch besondere Anschaulichkeit ausgezeichnete geometrische Darstellung dieser im allgemeinen immerhin etwas verwickelten Bewegung erhält man nach Poinsot, wenn man statt des Körpers selber sein Trägheitsellipsoid ins Auge faßt, das ja mit dem Körper fest verbunden ist und daher mit ihm zusammen sich dreht.

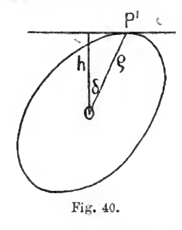


Fig. 40.

In irgend einem Augenblick sei die Drehungsachse OP', wobei P' ihren Schnittpunkt auf dem Ellipsoid, den sogenannten „Pol der Drehung", mit den Koordinaten x', y', z' bezeichnet (Fig. 40). Dann ist nach (478):

$$Px'^2 + Qy'^2 + Rz'^2 = 1 , \tag{516}$$

und die Richtungsverhältnisse der Drehungsachse, bezogen auf die Achsen des Ellipsoids, sind:

$$x' : y' : z' = p : q : r , \qquad \text{wobei } p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2 .$$

Setzen wir also die Länge des Halbmessers $OP' = \varrho$, so folgt:

$$x' = \frac{p}{\omega} \cdot \varrho , \qquad y' = \frac{q}{\omega} \cdot \varrho , \qquad z' = \frac{r}{\omega} \varrho \tag{517}$$

und aus (516):

$$Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 = \frac{\omega^2}{\varrho^2} .$$

Dies ergibt mit Rücksicht auf (508):

$$\omega = c\varrho , \tag{518}$$

d. h. die Drehungsgeschwindigkeit ist stets proportional der Länge des Halbmessers, der die jeweilige Drehungsachse vorstellt.

Ferner hat nach (478) die Normale des Ellipsoids im Pol P' der Drehung die Richtungsverhältnisse:

$$Px' : Qy' : Rz' = Pp : Qq : Rr .$$

Die Richtungscos selber sind darnach, im Hinblick auf (509):

$$\frac{Pp}{c'}, \quad \frac{Qq}{c'}, \quad \frac{Rr}{c'}. \tag{519}$$

Die Normale des Ellipsoids in P' wechselt also in bezug auf die Hauptachsen des Ellipsoids im allgemeinen ihre Richtung. Multipliziert man aber diese drei Richtungscos mit α_1, α_2, α_3, so ergibt sich nach (511) eine Konstante, d. h. der Winkel, welchen diese Normale mit der ungestrichenen, im Raume festen x-Achse bildet, ist konstant, ebenso der mit der y- und der mit der z-Achse. Daher bleibt die Richtung der Normalen im Raume fest, und zwar ist sie nach § 137 nichts anderes als die Normale der invariablen Ebene, welch letztere mithin der Tangentialebene des Ellipsoids in P' parallel ist.

Aber noch mehr. Die Tangentialebene des Trägheitsellipsoids im Pol P' der Drehung bleibt nicht nur stets sich parallel, sondern sie bleibt auch im Raume fest.

Berechnen wir nämlich ihre Entfernung h vom Drehpunkt O (Fig. 40), so ergibt sich hierfür:

$$h = \varrho \cdot \cos\delta,$$

wobei δ den Winkel bezeichnet zwischen dem Durchmesser OP' und der Normalen des Ellipsoids in P'. Also nach (517) und (519):

$$\cos\delta = \frac{p}{\omega} \cdot \frac{Pp}{c'} + \frac{q}{\omega} \cdot \frac{Qq}{c'} + \frac{r}{\omega} \cdot \frac{Rr}{c'}$$

und mit Rücksicht auf (508) und (518):

$$h = \varrho \cdot \frac{c^2}{\omega c'} = \frac{c}{c'}, \tag{520}$$

also konstant.

Aus diesen Sätzen ergibt sich zusammengefaßt das folgende einfache Bild der Bewegung: Das Trägheitsellipsoid dreht sich um seinen festen Mittelpunkt so, daß es an einer bestimmten festen Tangentialebene entlang rollt (§ 145), wobei die Drehungsgeschwindigkeit stets proportional ist der Entfernung des Berührungspunktes, d. h. des Poles der Drehung, vom Mittelpunkt.

Hierbei erkennt man auch wieder, daß die Drehungsachse nur dann eine konstante Richtung beibehält, wenn sie mit einer Hauptträgheitsachse zusammenfällt; denn in jedem anderen Falle zwingt

die Art der Oberflächenkrümmung des Ellipsoids die Drehungsachse OP' in immer wieder neue Lagen.

Wir wollen der Frage nach der Lage der Drehungsachsen, im Anschluß an die Betrachtungen des § 145, für den vorliegenden Fall noch ein wenig weiter nachgehen. Sehr anschaulich werden die Verhältnisse, wenn wir uns die feste (invariable) Ebene etwa mit Ruß geschwärzt denken, so daß die Spur davon bei der Berührung auf dem Ellipsoid zurückbleibt. Dann bestimmen die schwarzen Punkte P' auf dem Ellipsoid den im Körper festen Kegel, die vom Ruß befreiten Punkte P auf der invariabeln Ebene den im Raum festen Kegel der Drehungsachsen.

Betrachten wir zuerst die Punkte P' auf dem Ellipsoid; sie bilden die sogenannte „Polhodie". Ihre Koordinaten x', y', z' befriedigen außer der Gleichung (516) wegen (517), (509), (518) und (520) auch die Gleichung:

$$P^2x'^2 + Q^2y'^2 + R^2z'^2 = \frac{1}{h^2}. \tag{521}$$

Beide Gleichungen kombiniert ergeben:

$$P(Ph^2 - 1)x'^2 + Q(Qh^2 - 1)y'^2 + R(Rh^2 - 1)z'^2 = 0. \tag{522}$$

Dies ist die Gleichung des im Körper festen Kegels der Drehungsachsen, der auf dem Trägheitsellipsoid die Polhodie ausschneidet. Es ist ein Kegel zweiter Ordnung, die Polhodie also eine geschlossene Kurve von übersichtlicher Form. Die Gestalt des Kegels hängt für einen bestimmten Körper von einem einzigen Parameter ab, der Größe h^2, welche nach (520), (508) und (509) den Wert besitzt:

$$h^2 = \frac{Pp^2 + Qq^2 + Rr^2}{P^2p^2 + Q^2q^2 + R^2r^2}. \tag{523}$$

Um die Anschauung zu fixieren, wollen wir die Bezeichnung der Hauptträgheitsmomente folgendermaßen wählen:

$$P \geq Q \geq R, \tag{524}$$

so daß P der kürzesten, R der längsten Achse des Trägheitsellipsoids entspricht.

Dann ist:

$$Ph^2 \geq 1, \qquad Qh^2 \gtreqless 1, \qquad Rh^2 \leq 1, \tag{525}$$

wie sich leicht aus (523) ergibt.

Es sind also drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem h^2 größer, kleiner oder ebenso groß ist wie $\frac{1}{Q}$.

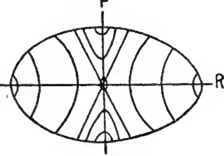


Fig. 41.

Die entsprechenden Formen der Polhodie sind in der Fig. 41 angedeutet, wo die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments Q rechtwinklig zur Bildebene zu denken ist. Die Polhodie besteht aus zwei getrennten Stücken, symmetrisch zu beiden Seiten des Mittelpunktes O. Je nachdem Qh^2 größer oder kleiner ist als 1, umschließt die Polhodie die R-Achse oder die P-Achse, d. h. die Achse des kleinsten oder die Achse des größten Trägheitsmoments; niemals aber umschließt sie die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments. Im Grenzfall $Qh^2 = 1$ degeneriert der Kegel (522) in die beiden Ebenen:

$$\frac{z}{x} = \pm \sqrt{\frac{P(P-Q)}{R(Q-R)}}, \tag{526}$$

und die Polhodie besteht aus zwei sich in den Endpunkten der mittleren Hauptträgheitsachse schneidenden Ellipsen (in der Fig. 41 durch Gerade angedeutet), es sind die Berührungspunkte des Ellipsoids mit denjenigen Tangentialebenen, die um die Strecke $h = \frac{1}{\sqrt{Q}}$ vom Mittelpunkt entfernt sind.

Den geschilderten geometrischen Verhältnissen entsprechen die Besonderheiten der physikalischen Vorgänge. Bei der Bewegung des Ellipsoids schreitet der Pol der Drehung P' auf der durch den Anfangszustand bestimmten Polhodie fort, aber selbstverständlich nicht in dem Sinne einer gewöhnlichen Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Kurve. Was sich bewegt, ist nicht die Materie des Punktes P' — denn dieselbe ruht ja gerade im Augenblick der Drehung —, sondern vielmehr seine Eigenschaft, Pol der Drehung zu sein. Wir haben hier wieder ein gutes Beispiel für den im § 1 erläuterten allgemeinen Begriff der Bewegung.

Wenn der Pol P' sich anfangs im Endpunkt einer Hauptträgheitsachse befindet, so verbleibt er dortselbst für alle Zeiten, entsprechend ihrer schon wiederholt festgestellten Eigenschaft als freier Drehungsachse. Aber wir erkennen hier weiter einen wesent-

lichen Unterschied in dem Verhalten der Achse des größten und des kleinsten Hauptträgheitsmoments gegenüber dem der mittleren Achse. Wenn nämlich der Pol P' nicht genau, sondern nur nahezu mit dem Endpunkt der P- oder R-Achse zusammenfällt, so bleibt er beständig in nächster Nähe dieses Endpunktes, da die Polhodie die Achse umschließt, wie in der Fig. 41 ersichtlich; wenn er aber von dem Endpunkt der Q-Achse auch noch so wenig abweicht, so führt ihn die Polhodie, auf der er seinen Weg fortsetzt, in große Entfernungen von seiner Anfangslage. Daher heißen die Achsen des größten und des kleinsten Hauptträgheitsmoments „stabile", die des mittleren Hauptträgheitsmoments eine „labile" Drehungsachse.

Die Kurve der Drehungspole P auf der invariablen Ebene, welche den im Raume festen Kegel der Drehungsachsen bezeichnet, heißt „Herpolhodie", sie ist von komplizierterer Form und im allgemeinen nicht geschlossen.

§ 152. Nehmen wir nun die Betrachtung des allgemeinen Falles beliebig gegebener äußerer Kräfte wieder auf und fragen außer nach den Drehungsgeschwindigkeiten p, q, r auch nach der Lage des Körpers zur Zeit t. Es wird häufig erwünscht sein, diese nicht durch die neun Richtungscos, sondern direkt durch drei voneinander unabhängige Winkel auszudrücken, wobei freilich die Symmetrie geopfert werden muß.

Dies soll im folgenden geschehen.

Zunächst bestimmen wir die Richtung der (positiven) z'-Achse durch die beiden Polarwinkel ϑ (zwischen 0 und π) und φ (zwischen 0 und 2π) wie in § 32.

Dann hat ein Punkt auf der z'-Achse in der Entfernung r vom Anfangspunkt die Koordinaten:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi = r \cdot \alpha_3,$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi = r \cdot \beta_3,$$
$$z = r \cos\vartheta = r \cdot \gamma_3,$$

also:

$$(527) \quad \begin{cases} \alpha_3 = \sin\vartheta \cos\varphi, \\ \beta_3 = \sin\vartheta \sin\varphi, \\ \gamma_3 = \cos\vartheta. \end{cases}$$

Nachdem so die z'-Achse festgelegt ist, kann sich das gestrichene Koordinatensystem noch um diese Achse drehen. Daher bestimmen wir die Richtung der (positiven) x'-Achse durch den Winkel ψ (zwischen 0 und 2π), welchen sie mit einer festen Richtung in der $(x'y')$-Ebene, nämlich mit der Projektion der (positiven) z-Achse auf diese Ebene bildet, gerechnet im Sinne einer positiven Drehung um die z'-Achse (Fig. 42).

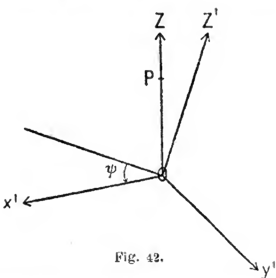


Fig. 42.

Dann hat ein Punkt P auf der z-Achse in der Entfernung r vom Anfangspunkt die Koordinaten:

$$x' = r \sin\vartheta \cos\psi \quad = r\cdot\gamma_1\,,$$
$$y' = -r \sin\vartheta \sin\psi = r\cdot\gamma_2\,,$$
$$z' = r\cos\vartheta \quad = r\cdot\gamma_3\,,$$

also:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \sin\vartheta\cos\psi\,,\\ \gamma_2 &= -\sin\vartheta\sin\psi\,. \end{aligned}\right\} \tag{528}$$

Hierdurch sind nun auch die übrigen vier Richtungscos eindeutig bestimmt.

Denn aus den Relationen (492):

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2\,, \qquad \beta_2 = \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3$$

ergibt sich:

$$\alpha_1(1-\gamma_3^2) = -\gamma_1\gamma_3\alpha_3 - \gamma_2\beta_3\,,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta\,,\\ \text{ebenso: } \beta_2 &= -\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta\,,\\ \alpha_2 &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta\,,\\ \beta_1 &= -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta\,. \end{aligned}\right\} \tag{529}$$

Nun lassen sich auch die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit ξ, η, ζ, bzw. ξ', η', ζ', direkt durch die unabhängigen Winkel φ, ϑ, ψ und ihre Differentialquotienten nach t ausdrücken, etwa mittelst der Relationen (493) bzw. (500), und ergeben:

$$
(530)\quad \begin{cases}
\xi = \sin\vartheta\cos\varphi\,\dfrac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\,\dfrac{d\vartheta}{dt}, \\
\eta = \sin\vartheta\sin\varphi\,\dfrac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\,\dfrac{d\vartheta}{dt}, \\
\zeta = \cos\vartheta\,\dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt},
\end{cases}
$$

$$
(531\quad \begin{cases}
\xi' = \sin\vartheta\cos\psi\,\dfrac{d\varphi}{dt} - \sin\psi\,\dfrac{d\vartheta}{dt}, \\
\eta' = -\sin\vartheta\sin\psi\,\dfrac{d\varphi}{dt} - \cos\psi\,\dfrac{d\vartheta}{dt}, \\
\zeta' = \cos\vartheta\,\dfrac{d\varphi}{dt} + \dfrac{d\psi}{dt}.
\end{cases}
$$

Eine jede der im § 147 abgeleiteten allgemeinen Relationen kann zur Prüfung und Verifizierung dieser Ausdrücke benutzt werden.

Die Einführung der drei unabhängigen Winkel φ, ϑ, ψ gestattet auch eine direkte Anwendung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art (405) oder der Hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen (412); doch besitzen dieselben infolge des Mangels an Symmetrie eine wenig übersichtliche Form.

§ 153. Schließlich wollen wir noch ein Beispiel behandeln, in dem eine gegebene äußere Kraft wirksam ist, und wählen hierfür den Fall eines einfachen symmetrischen Kreisels, der in einem Punkt O seiner Symmetrieachse unterstützt ist. Die Symmetrieachse, auf welcher auch der Schwerpunkt S liegt, nehmen wir zur z'-Achse, dagegen die Vertikale nach oben, wie gewöhnlich, zur z-Achse (Fig. 43).

Bezeichnet dann h die Entfernung des Schwerpunktes S vom festen Punkt O, und M die Gesamtmasse des Kreisels, so ist die äußere Kraft:

$$\mathfrak{F}_x = 0, \quad \mathfrak{F}_y = 0, \quad \mathfrak{F}_z = -Mg,$$

ihr Angriffspunkt:

$$(532) \qquad x_0 = h\alpha_3, \quad y_0 = h\beta_3, \quad z_0 = h\gamma_3$$

und ihr Drehungsmoment:

$$\mathfrak{N}_x = -Mgh\beta_3, \quad \mathfrak{N}_y = Mgh\alpha_3, \quad \mathfrak{N}_z = 0,$$

oder:

$$\mathfrak{N}_{x'} = Mgh\gamma_2, \quad \mathfrak{N}_{y'} = -Mgh\gamma_1, \quad \mathfrak{N}_{z'} = 0.$$

Fig. 43.

Die Bewegungsgleichungen vereinfachen sich erheblich dadurch, daß wegen der Symmetrie des Kreisels $P = Q$. Zu ihrer

vollständigen Integration brauchen wir drei voneinander unabhängige Beziehungen, und wählen als solche die einfachsten aus, nämlich die dritte der Gleichungen (505), welche integriert lautet:

$$(\gamma_1 p + \gamma_2 q) P + \gamma_3 r R = \text{const.}, \tag{533}$$

ferner die dritte der Gleichungen (506), welche ergibt:

$$r = \text{const.}, \tag{534}$$

endlich das Prinzip der lebendigen Kraft, welches hier nach (510) und (357) lautet:

$$\frac{1}{2}(Pp^2 + Qq^2 + Rr^2) + Mgz_0 = \text{const.},$$

oder nach (532) und (534):

$$P(p^2 + q^2) + 2Mgh\gamma_3 = \text{const.} \tag{535}$$

Hiezu kommen noch die allgemeinen Beziehungen, welche die Größen p, q, r und γ_1, γ_2, γ_3 aneinanderknüpfen.

Im Anfangszustand drehe sich der Kreisel nur um seine Symmetrieachse, d. h. für $t = 0$ sei $p = 0$, $q = 0$, $r = r_0$, und diese bilde den Winkel ϑ_0 mit der Vertikalen, spitz oder stumpf, je nachdem der Schwerpunkt S oberhalb oder unterhalb des Drehpunktes O liegt. Dann sind die drei Bewegungsgleichungen:

$$(\gamma_1 p + \gamma_2 q) P + \cos\vartheta \cdot r_0 R = \cos\vartheta_0 \cdot r_0 R,$$
$$r = r_0,$$
$$P(p^2 + q^2) + 2Mgh\cos\vartheta = 2Mgh\cos\vartheta_0.$$

Nun führen wir alle Variabeln auf die drei unabhängigen Winkel ϑ, φ, ψ zurück, indem wir γ_1 und γ_2 durch (528) und p, q, r durch (504) und (531) ersetzen; dann folgt:

$$P\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} = Rr_0(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta), \tag{536}$$

$$\cos\vartheta \cdot \dot{\varphi} + \dot{\psi} = r_0, \tag{537}$$

$$P(\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2) = 2Mgh(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta). \tag{538}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung lassen sich ϑ und φ, dann aus der zweiten Gleichung ψ berechnen. So ergibt die Elimination von $\dot{\varphi}$ aus (536) und (538):

(539) $$\dot{\vartheta}^2 = \frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{P} \cdot \left(2Mgh - \frac{R^2 r_0^2 (\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)}{P \sin^2\vartheta}\right)$$

und daraus t als elliptisches Integral von ϑ.

Wir wollen die Rechnung weiter verfolgen für den physikalisch interessantesten Fall, daß die Drehungsgeschwindigkeit r_0 sehr groß ist, oder genauer gesprochen, daß:

(540) $$r_0^2 \gg \frac{MPgh}{R^2}.$$

Denn eine Größenbeziehung hat nur dann eine physikalische Bedeutung, wenn sie unabhängig ist von der Wahl der Maßeinheiten.

Setzen wir nun:

(541) $$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta',$$

so folgt zunächst, daß ϑ' positiv ist; denn nach (538) ist $\vartheta_0 < \vartheta$, d. h. die Symmetrieachse des Kreisels ist anfangs am steilsten gerichtet.

Daher ist ferner auf der rechten Seite von (539) auch der zweite Faktor positiv, d. h.:

$$\frac{R^2 r_0^2 (\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)}{P \sin^2\vartheta} < 2Mgh,$$

oder mit Rücksicht auf (540):

$$\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta \ll 1,$$

also ϑ' klein, und nahezu:

$$\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta = \vartheta' \cdot \sin\vartheta_0.$$

Dies in (539) eingesetzt, ergibt:

$$\left(\frac{d\vartheta'}{dt}\right)^2 = \frac{\vartheta' \sin\vartheta_0}{P}\left(2Mgh - \frac{R^2 r_0^2 \vartheta'}{P \sin\vartheta_0}\right)$$

und integriert, mit Berücksichtigung des Anfangszustandes:

(542) $$\vartheta' = \frac{2MPgh \sin\vartheta_0}{R^2 r_0^2} \sin^2\left(\frac{Rr_0 t}{2P}\right).$$

Der Neigungswinkel ϑ der Kreiselachse gegen die Vertikale schwankt also periodisch zwischen seinem kleinsten Wert ϑ_0 und einem sehr wenig davon verschiedenen hin und her, mit einer Periode, die unabhängig ist von der Beschleunigung der Schwere. Je größer die Umdrehungsgeschwindigkeit des Kreisels, desto schneller und desto kleiner sind die Schwankungen.

Fassen wir weiter den Winkel φ ins Auge, welchen die durch die Kreiselachse gehende Vertikalebene mit einer im Raume festen Vertikalebene bildet, so ergibt sich hierfür aus (536), (541) und (542):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2Mgh}{Rr_0} \sin^2 \frac{Rr_0 t}{2P}.$$

Integriert:

$$\varphi = \frac{Mgh}{Rr_0}\left(t - \frac{P}{Rr_0} \sin \frac{Rr_0 t}{P}\right) + \varphi_0, \tag{543}$$

d. h. die Kreiselachse führt eine „Präzession" aus, indem ihre Vertikalebene sich beständig in einem bestimmten Sinne dreht, mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche periodisch zwischen Null und einem Maximalwert wechselt, und zwar unabhängig von dem Neigungswinkel der Kreiselachse gegen die Vertikale. Auch hier erfolgen die Schwankungen um so schneller, sind aber um so kleiner, je größer die Umdrehungsgeschwindigkeit ist, während die mittlere Winkelgeschwindigkeit mit wachsender Umdrehungszahl abnimmt.

Der Sinn der Präzessionsbewegung entspricht dem Vorzeichen von r_0. Wenn also $r_0 > 0$, so bewegt sich in der Fig. 43 der Schwerpunkt S nach hinten. Unabhängig von der Wahl der Achsenrichtungen kann man den Zusammenhang zwischen der Richtung der Schwerkraft, der Lage des Schwerpunktes, dem Sinne der Kreiseldrehung und dem der Präzessionsbewegung durch den einfachen Satz charakterisieren, daß bei der Präzessionsbewegung die positive Richtung der Kreiselachse sich der positiven Achsenrichtung des von der Schwerkraft ausgeübten Drehungsmoments annähert. Letztere geht in der Fig. 43 von vorn nach hinten.

Dieser Zusammenhang bleibt natürlich bestehen, wenn anstatt der Schwerkraft Mg irgendeine andere Kraft F, etwa ein Stoß, an einem Punkt S der Kreiselachse angreift.

Eine bequeme Anschauung von dem Inhalt der letzten Sätze gewährt die Betrachtung eines gewöhnlichen Kinderspielkreisels, den man in schnelle Rotation gebracht hat und mit der unteren Spitze auf den Boden fest aufsetzt, so daß die Achse einen beliebigen Winkel mit der Vertikalen bildet.

Denn da durch Reibungswiderstände die Umdrehungsgeschwindigkeit allmählich verzögert wird, so treten die den verschiedenen Werten von r_0 entsprechenden Bewegungen nach und nach in die Erscheinung. Zunächst scheint die Achse fast still zu stehen,

während sie in Wirklichkeit sehr schnelle Schwankungen mit kleiner Amplitude sowohl in der Richtung gegen die Vertikale als auch rechtwinklig dazu ausführt; dann fängt sie langsam ihre Präzession an, in dem oben bezeichneten Sinne. Zugleich beginnt ihre Neigung gegen die Vertikale merklich zu schwanken, erst wenig und undeutlich, dann stärker und immer heftiger, während gleichzeitig auch die Präzessionsbewegung immer schneller wird, bis schließlich die Kreiselachse so weit überneigt, daß ein Punkt der Peripherie mit dem Boden in Berührung kommt.

Verzeichnis der Definitionen und der wichtigsten Sätze.

	Seite
Abgeschlossenes System	171
Achse eines Kräftepaares	121
Äußere Arbeit	170
Äußere Kräfte	164
Aktion und Reaktion	36
Allgemeine Kraftkomponenten	175
Amplitude	16
Anfangszustand	13
Angriffspunkt	106
Arbeit	59
Archimedisches Prinzip	166
Arm eines Kräftepaares	116
Astronomische Masseneinheit	36
Aufpunkt	44
Auftrieb einer Flüssigkeit	166
Beschleunigung	7
Bewegungsfreiheit	84
Bewegungsgröße	179
Coriolissche Kraft	77
Deviationsmoment	200
Dichte	38
Dimensionsformel	6
Drehungsachse	121
Drehungsmoment um eine Gerade	130
Drehungsmoment um einen Punkt	131
Dyn	12
Energie	62
Erg	60
Flächengeschwindigkeit	194
Foucaultsches Pendel	102
Freie Drehungsachse	199
Freiheitsgrade	81
Frequenz	16
Galilei-Transformation	74
Geodätische Linie	91
Geographische Breite	80
Geschwindigkeit	5
Gewicht	12
Gradient	50
Gramm	12
Gravitation	35
Gravitationspotential	45
Hamilton-Jacobische Differentialgleichung	181
Hamiltonsches Prinzip	172
Hauptträgheitsachse	201
Hauptträgheitsmoment	201
Hebel	129
Herpolhodie	218
Homogener Körper	38
Impuls	192
Impulskoordinaten	192
Impulsmoment	194
Innere Kräfte	164
Invariable Ebene	194
Kanonische Bewegungsgleichungen	179
Keplersche Gesetze	68
Kettenlinie	160
Kinematik	3
Kinetische Energie	63
Kinetisches Potential	173
Komponenten	22
Konservative Kräfte	63
Kraft	10
Kraftlinien	51
Kräftepaar	115
Kreisel	220
Kreispendel	88

	Seite
Lagrangesche Bewegungsgleichungen erster Art	167
Lagrangesche Bewegungsgleichungen zweiter Art	176
Laplacesche Gleichung	54
Lebendige Kraft	59
Logarithmisches Dekrement	20
Logarithmisches Potential	58
Masse	12
Materieller Punkt	1
Mathematisches Pendel	88
Momentankräfte	192
Moment einer Bewegungsgröße	194
Moment einer Kraft in bezug auf eine Gerade	125
Moment einer Kraft in bezug auf einen Punkt	124
Moment eines Kräftepaars	120
Newtonsches Axiom, erstes	9
Newtonsches Axiom, zweites	10
Newtonsches Axiom, drittes	36
Newtonsches Potential	46
Niveaufläche	50
Pendel	88
Permanente Drehungsachse	199
Phase	16
Phoronomie	3
Physisches Pendel	202
Planetenbewegung	65
Poissonsche Gleichung	55
Pol der Drehung	214
Polarkoordinaten, ebene	64
Polarkoordinaten, räumliche	39
Polhodie	216
Potential	45
Potentialfunktion	53
Potentialgefälle	49
Potentielle Energie	63
Präzession	223
Prinzip der Erhaltung der Bewegungsgröße	189
Prinzip der Erhaltung der Energie	62
Prinzip der Flächen	65
Prinzip der kleinsten Wirkung	172
Prinzip der lebendigen Kraft	61
Prinzip der Relativität	74
Prinzip der virtuellen Arbeit	138
Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung	36
Prinzip von d'Alembert	85
Rechtshändiges Bezugssystem	21
Reduzierte Pendellänge	203
Relativbewegung	70
Reversionspendel	204
Richtungscosinus	21
Rotation als Vektor	145
Rotationspaar	149
Schwerpunkt	112
Schwingungszentrum	203
Selbstpotential	154
Skalar	46
Skalares Produkt	60
Sphärisches Pendel	95
Stabile Drehungsachse	218
Starrer Körper	106
Statik	105
Statisches Moment	124
Tangentialkraft	32
Tautochrone	93
Trägheit	11
Trägheitsellipsoid	200
Trägheitsgesetz	9
Trägheitsmoment	197
Trägheitswiderstand	85
Translation	151
Treibende Kraft	83
Vektor	21
Vektorielle Addition	30
Vektorprodukt	125
Vertikale	80
Virtuelle Verschiebung	137
Vollständiges System	171
Wirkungsintegral	180
Zenith	80
Zentralachse eines Kräftesystems	128
Zentralkräfte	15, 35
Zentrifugalkraft	77
Zentripetalkraft	32
Zustand	13, 29
Zwangskräfte	83

Druck von August Pries in Leipzig.